Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

Introdução à teoria das filas

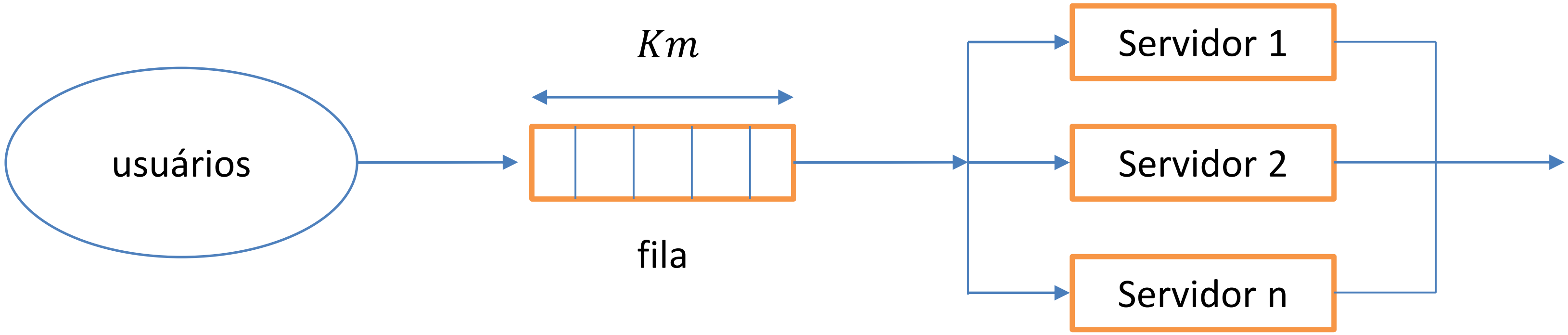
- Existem problemas em engenharia elétrica que correspondem à situação em que vários usuários de um serviço demandam este serviço de modo aleatório.

- Além disso, o tempo requerido para a prestação deste serviço é também aleatório.

- Estes problemas são modelados probabilisticamente através da teoria das filas.

- Quando um usuário chega a um sistema em que todos os servidores estão ocupados, ele pode esperar em uma fila até que seja servido.

- O modelos probabilístico usado em teoria das filas é ilustrado por



- Várias disciplinas podem ser usadas para a seleção do próximo usuário a ser servido.

- Dentre as disciplinas existem:

  - A FCFS (First Come-First Served), que serve primeiro quem chegou primeiro.

  - A FIFO (First In-First Out), que considera apenas 1 servidor.

- Os elementos básicos de um sistema de filas são:
  - O processo estocástico que caracteriza as chegadas dos usuários.
  - A duração y do serviço.
  - O número m de servidores.
  - O número máximo K de usuários simultaneamente no sistema (na fila ou em serviço).
  - O número de usuários M.

- A representação compacta destes elementos foi proposta por Kendall e consiste na notação:

$$A/B/m\ /K\ /M$$

em que A e B correspondem à distribuição estatística do tempo entre chegadas e à distribuição estatística da duração de serviço, respectivamente.

Exemplo 1

Quais são os parâmetros de um sistema de filas descrito pela notação $M/M/1\ /5\ /100$?

Solução:

A notação de Kendall em questão designa um sistema de filas com $M = 100$ usuários, $m = 1$ servidor, distribuição exponencial para o tempo entre chegadas (M) e duração do serviço (M), e $\mathrm{K} = 5$ usuários na fila.

Parâmetros de um sistema de filas

- Número médio de chegadas por unidade de tempo:

$$\lambda, \quad \text{(usuários por unidade de tempo)}$$

em que em caso de um modelo de Poisson caracteriza completamente o processo.

- Duração média do serviço:

$$\beta \quad \text{(unidade de tempo)}$$

- Intensidade do tráfego de entrada:

$$A = \lambda\beta \ \text{(Erlang)}$$

em que para um sistema com m servidores, o tráfego A só poderá ser escoado se

$$A = \lambda\beta \leq m$$

- Vazão do sistema:

$$S = \frac{A}{m} = \frac{\lambda\beta}{m},$$

em que $0 \leq S \leq 1$.

- Retardo (tempo entre a chegada e a saída do usuário):

$$d = w + y, \text{ (unidade de tempo)}$$

em que w é o tempo de espera na fila e y é o tempo de serviço.

- Usando valor esperado, tem-se o retardo médio:

$$E[d] = E[w] + E[y].$$

- Probabilidade de congestionamento em sistemas com perdas:

$$P_c$$

A. Processo de Poisson

- O processo $n(t)$ que caracteriza o número de usuários que chegam ao sistema em um intervalo $[0, t)$ é, em geral, modelado como um processo de Poisson.

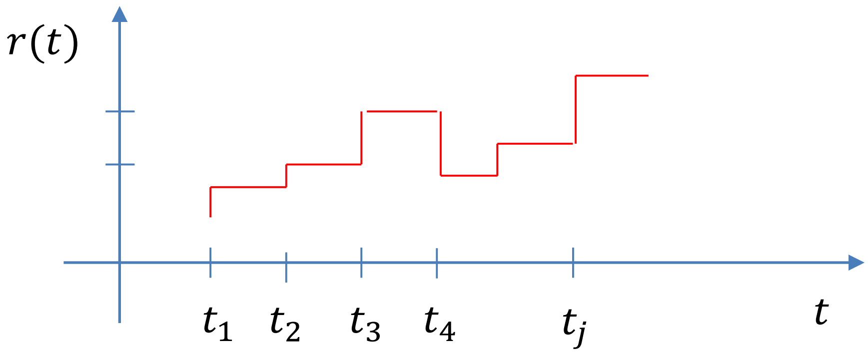
- Este processo será examinado como um caso particular de um processo de nascimento e morte.

- Definição de um processo de nascimento e morte: considere um processo estocástico $r(t)$ de parâmetro contínuo e amplitudes discretas, que assume valores no conjunto

$$\{0,1,2, \ldots\}$$

- Os elementos deste conjunto caracterizam os estados do sistema.

- Um função-amostra típica deste processo é apresentada abaixo.



- Definem-se as probabilidades de estado como

$$p_k(t) = P(r(t) = k)$$

e as probabilidades de transição

$$p_{kj}(\Delta t) = P(r(t + \Delta t) = j \mid r(t) = k), \qquad j, k \in \{0,1,2,\ldots\}$$

- Se $r(t)$ é um processo de Markov entãos as probabilidades de estado e transição caracterizam o problema.

- Diz-se que $r(t)$ é um processo de nascimento e morte quando

$$p_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & |j-k| > 1 \\ \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k+1 \\ \mu_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k-1 \end{cases}$$

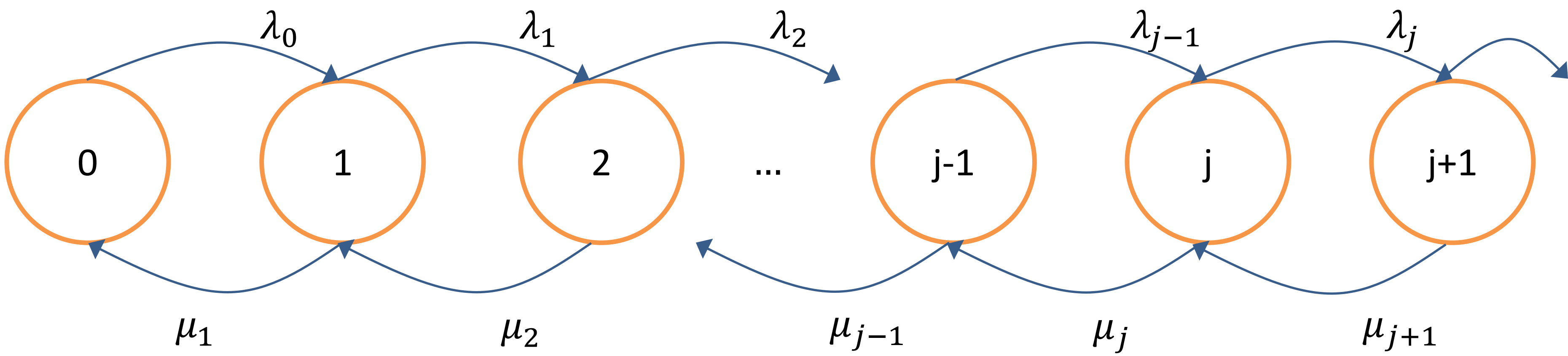
em que λ_k é a taxa de nascimentos quando o sistema está no estado k, μ_k é a taxa de mortes quando o sistema está no estado k, sendo $o(\Delta t)$ uma quantidade tal que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

- Em consequência, tem-se

$$p_{kk}(\Delta t) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t + o(\Delta t)$$

- O diagrama de estados associado a este processo é apresentado abaixo.



- De acordo com o teorema de probabilidade total, pode-se escrever

$$p_k(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(t) p_{jk}(\Delta t)$$

- O resultado para $k \geq 1$ é dado por

$$p_k(t + \Delta t) = p_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t + p_k(t)(1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t) + p_{k+1}(t)\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda_k p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t)$$

- Para $k = 0$, tem-se

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t) + p_1(t)\mu_1 \Delta t + o(\Delta t)$$
$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

- Para t grande, o sistema atinge o estado estacionário, o que resulta

$$\lim_{t\to\infty} P(r(t)=k) = \lim_{t\to\infty} p_k(t) = P_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_k(t)}{dt} = 0$$

- As probabilidades em estado estacionário devem satisfazer

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \qquad k \geq 1$$

e

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$$

que são obtidas fazendo-se $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$ e $\frac{dp_0(t)}{dt} = 0$

- A solução das equações pode ser resolvida por indução e se escreve

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} P_0, \qquad k = 1,2,\dots,$$

ou seja,

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \qquad k = 1,2,\dots$$

- Como $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ obtém-se de $P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$ que a probabilidade de P_0 é dada por

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)^{-1}$$

- As relações acima nos permitem a solução de sistemas de filas modelados por processos de nascimento e morte.

Exemplo 2

Mostre que para um sistema de filas com taxas de nascimento e mortes dadas por $\lambda_k = \lambda$ e $\mu_k = \mu$ tem-se

$$P_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

Solução:

Sabe-se que

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$$

e que por indução tem-se

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \; P_0$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ obtém-se

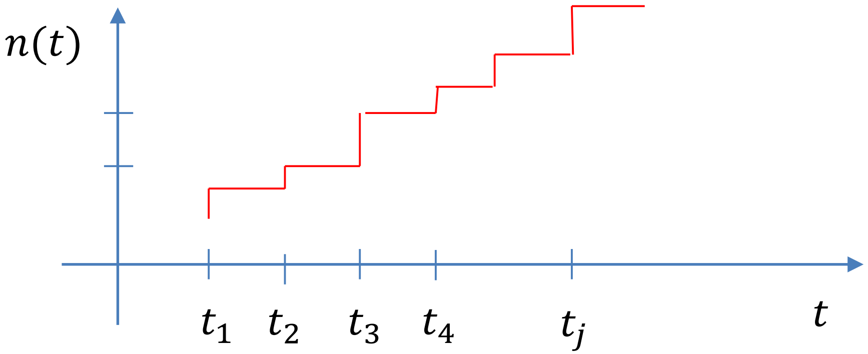
$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 \text{ e } \; P_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right),$$

o que resulta em

$$P_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

- Considere agora um processo de nascimento e morte $n(t)$ com $\mu_k = 0\,, k = 1,2, \ldots,$ e $\lambda_k = \lambda,\ k = 1,2, \ldots,$ o que caracteriza um processo de nascimento puro com λ em qualquer estado.

- Esse modelo de processo define um processo de Poisson ilustrado abaixo.



- No caso de um processo de nascimento puro, tem-se as equações diferenciais

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t)$$

- A solução da 1ª equação é dada por

$$p_0(t) = Ce^{-\lambda t}$$

- Para $t = 0$ o sistema está no estado 0 com probabilidade 1

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

- A solução da 2ª equação é dada por

$$p_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda t} p_{k-1}(\tau) d\tau$$

e pode ser escrita como

$$P(n(t) = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

- Como $n(t)$ é um processo de Markov, os seus incrementos são independentes.

- Além disso, como λ é constante os incrementos são estacionários, ou seja,

$$P(n(t+s) - n(s) = k) = P(n(t) = k) \ = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

- Calculando-se $E[n(t)]$ com $P(n(t) = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$ tem-se

$$E[n(t)] = \lambda t$$

e

$$\sigma_{n(t)}^2 = \lambda t,$$

o que resulta em

$$\lambda = \frac{E[n(t)]}{t}.$$

- Isto significa que a taxa de chegadas de usuários do sistema λ (taxa de nascimentos) é a razão entre o número médio de nascimentos e o intervalo de tempo.

- Considera-se agora a v.a. z que representa o tempo decorrido entre duas chegadas consecutivas.

- Suponha também que houve uma chegada de usuário ao sistema no instante t_0. Logo, tem-se

$$P(z > Z) = P\big(n(t_0 + Z) - n(t_0)\big) = 0) = e^{-\lambda Z}, Z > 0$$

- Portanto, tem-se também

$$p_z(Z) = \frac{d}{dz}\left(1 - e^{-\lambda Z}\right),\ Z > 0,$$

ou seja, tem-se uma fdp exponencial dada por

$$p_z(Z) = \lambda e^{-\lambda Z} u(Z)$$

- Logo, o tempo z entre duas chegadas consecutivas é uma v.a. com fdp exponencial de média

$$E[z] = \frac{1}{\lambda},$$

o que mostra que para um processo de Poisson o tempo médio entre chegadas é o inverso da taxa de chegada λ.

- Um outro resultado importante se refere à soma de processos de Poisson estatisticamente independentes.

- Pode-se mostrar que se $n_l(t), l = 1,2, \ldots, L$ são processos de Poisson estatisticamente independentes com $\lambda_l, l = 1,2, \ldots, L$, tem-se

$$n(t) = \sum_{l=1}^{L} n_l(t)\,,$$

e o processo resultante é de Poisson com intensidade dada por

$$\lambda = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l\,.$$

Demonstração:

Como a v.a. $n_l(t)$ tem função característica dada por

$$M_{n_l(t)}(v) = E\left[e^{jvn_l(t)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_l t)^k e^{-\lambda_l t}}{k!} e^{jvk} = e^{\lambda_l t(e^{jv}-1)}$$

Logo, $n(t) = \sum_{l=1}^{L} n_l(t)$ tem função característica descrita por

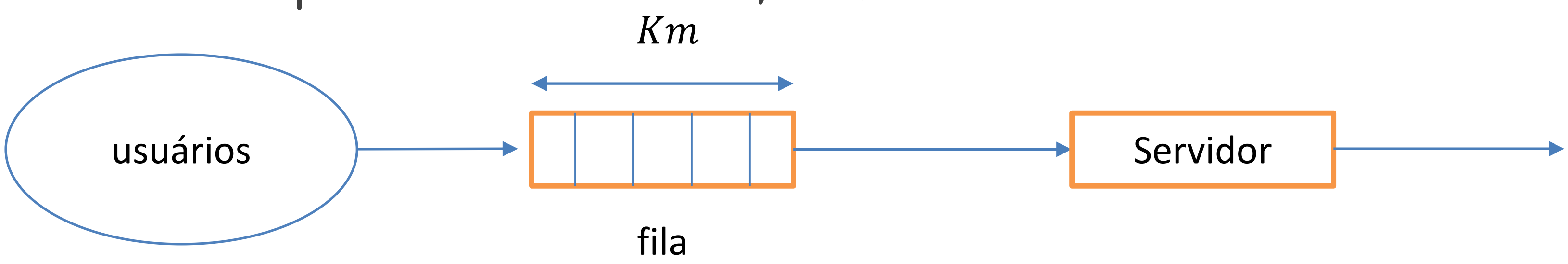
$$M_{n_l(t)}(v) = E\left[e^{jvn(t)}\right]$$

$$= \prod_{l=1}^{L} M_{n_l(t)}(v) = e^{\sum_{l=1}^{L} \lambda_l t(e^{jv}-1)}$$

m que $\lambda = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l$ e $n(t)$ é um processo de Poisson.

B. Fila M/M/1

- Considere um sistema de filas em que um número infinito de usuários é atendido por um único servidor, conforme ilustrado abaixo.



- As chegadas seguem um processo de Poisson com intensidade λ e o tempo de serviço y de um usuário segue uma fdp exponencial dada por

$$p_y(Y) = \mu e^{-\mu Y} u(Y)$$

- Esse sistema de filas é conhecido como M/M/1 e considera que o número máximo de usuários no sistema é infinito.

- A probabilidade de que um usuário que está sendo servido em um instante t^* permaneça no sistema ao fim de um intervalo de duração Δt é dada por

$$P(y \geq t^* + \Delta t | y \geq t^*) = \frac{P(y \geq t^* + \Delta t, y \geq t^*)}{P(y \geq t^*)}$$

$$= \frac{P(y \geq t^* + \Delta t)}{P(y \geq t^*)} = \frac{e^{-\mu(t^* + \Delta t)}}{e^{-\mu t^*}} = e^{-\mu \Delta t}$$

- A probabilidade acima é independente de t^*, o que corresponde à falta de memória da distribuição exponencial.

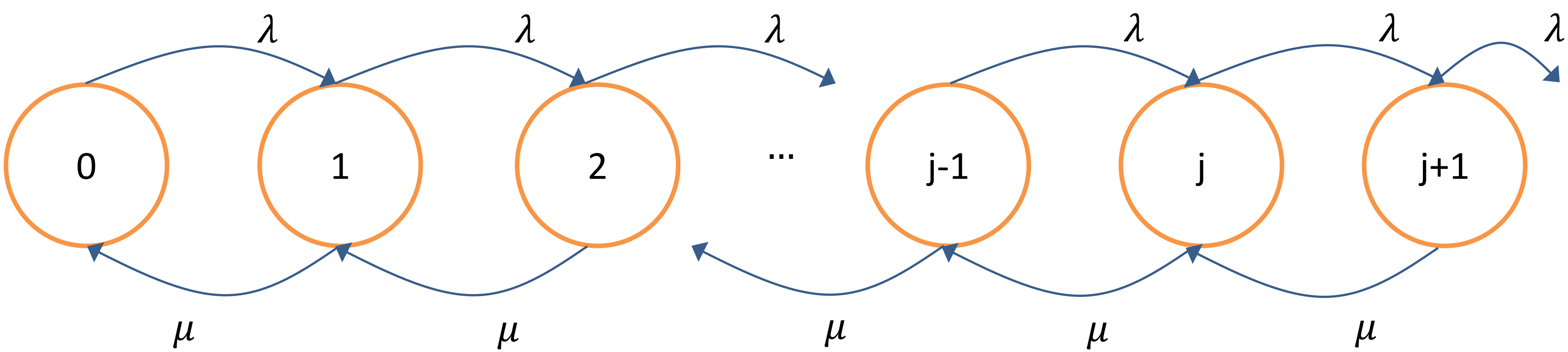
- Logo, a probabilidade de que o usuário deixe o sistema ao longo de Δt é

$$1 - e^{-\mu \Delta t} = \mu \Delta t - \frac{1}{2}(\mu \Delta t)^2 + \frac{1}{6}(\mu \Delta t)^3 - \cdots$$
$$= \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

- Se $x(t)$ representa o número de usuários no sistema no instante t, então $x(t)$ é um processo de nascimento e morte com probabilidades de transição dadas por

$$p_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & |j-k| > 1 \\ \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k+1 \\ \mu_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k-1 \end{cases},$$

em que $\lambda_k = \lambda,\ k = 0,1,2,\ldots$ e $\mu_k = \mu,\ k = 0,1,2,\ldots$. O diagrama de estados associado a este processo é apresentado abaixo.



- Para este processo, as probabilidades em estado estacionário $\{P_k, k =$

- As probabilidades P_0 e P_k podem ser consolidadas na expressão:

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

- Note que como $\frac{1}{\mu}$ é a duração média do serviço, a condição $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ equivale a dizer que o sistema atinge o estado estacionário quando o tráfego de entrada médio $A < 1$.

- Representando-se por x o número de usuários no sistema ao fim de um tempo muito grande, o número médio de usuários no sistema é dada por

$$E[x] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- Como o sistema está em equilíbrio, a vazão S é igual ao tráfego de entrada dado por

$$S = \lambda\beta = \frac{\lambda}{\mu}$$

- O número médio de usuários ao final de um tempo muito grande pode ser expresso por

$$E[x] = \frac{S}{1-S}$$

- O retardo médio de um usuário é dado por

$$E[d] = E[w] + E[y],$$

em que o tempo de espera na fila é

$$w = \sum_{k=1}^{x} y_k\,,$$

e y_k é o tempo de serviço para o k-ésimo usuário.

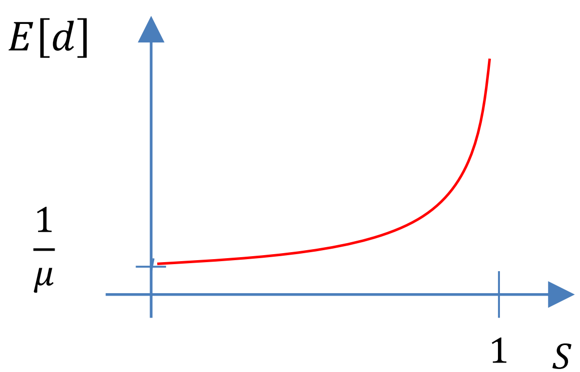
- Como x e y_k são v.a.s estatisticamente independentes, tem-se

$$E[w] = E\left[\sum_{k=1}^{x} y_k\right] = E[xy] = E[x]E[y] = \frac{1}{\mu}\frac{S}{1-S}$$

- Portanto, tem-se

$$E[d] = E[w] + E[y] = \frac{1}{\mu}\frac{S}{1-S} + \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-S},$$

em que a curva de retardo médio versus vazão é dada para um sistema de filas M/M/1 é mostrada abaixo.



C. Teorema de Little

- O retardo médio de um sistema pode ser obtido a partir de um resultado geral conhecido como Teorema de Little.

- Segundo esse teorema, o número médio de usuários encontrado no sistema é igual ao número médio de usuários que ele deixe no sistema ao sair.

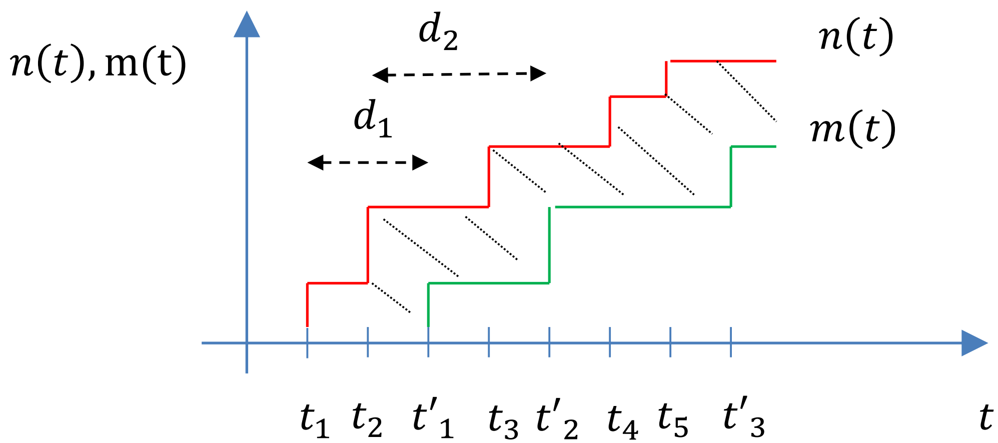
- Logo, o número médio de usuários no sistema é dado por

$$E[x] = \lambda E[d] = \lambda \frac{\frac{1}{\mu}}{1 - S} = \frac{S}{(1 - S)}$$

em que a vazão $S = \frac{\lambda}{\mu}$ pode ser escrita como

$$S = 1 - P_0 = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Considere um sistema de filas com disciplina FCFS, em que os processos $n(t)$ e $m(t)$ caracterizam, respectivamente, o número de chegadas e o número de saídas do sistema no intervalo $(0, t]$.



- Supondo-se que o sistema de filas está vazio em $t = 0$, o número de usuários no sistema no instante t se escreve

$$x(t) = n(t) - m(t)$$

- Assim, o número médio de usuários no sistema é dado por

$$\bar{x}_{t^*} = \frac{1}{t^*}\int_0^{t^*} x(t)dt$$

- Por outro lado, o retardo médio por usuário é expresso por

$$\bar{d}_{t^*} = \frac{1}{n(t^*)}\left[\sum_{i=1}^{m(t^*)} d_i + \sum_{i=m(t^*)+1}^{n(t^*)} (t^* - t_i)\right]$$

em que t_i e d_i representam o instante de chegada e o tempo gasto no sistema pelo i-ésimo usuário, respectivamente.

- A área da região hachurada é dada por

$$\mathcal{R} = \int_0^{t^*} x(t)dt = \sum_{i=}^{m(t^*)} d_i + \sum_{i=m(t^*)+1}^{n(t^*)} (t^* - t_i)\,,$$

o que permite escrever

$$\bar{x}_{t^*} t^* = \mathrm{n}(t^*)\bar{d}_{t^*}$$

ou ainda

$$\bar{x}_{t^*} = \frac{\mathrm{n}(t^*)}{t^*}\bar{d}_{t^*} = \lambda_{t^*}\bar{d}_{t^*},$$

em que λ_{t^*} é a taxa média de chegada de usuários em $(0, t^*]$.

- Note que as médias $\bar{x}_{t^*}$ e $\bar{d}_{t^*}$ correspondem a médias temporais em $(0, t^*]$.

- Supondo-se processos ergódicos, as médias temporais tendem para médias estatísticas do processo com probabilidade 1, o que resulta

$$\lim_{t^* \to \infty} \bar{x}_{t^*} = E[x]$$

e

$$\lim_{t^* \to \infty} \bar{d}_{t^*} = E[d]$$

- Neste caso, $\bar{x}_{t^*} = \lambda_{t^*} \bar{d}_{t^*}$ se escreve

$$E[x] = \lambda E[d],$$

o que conclui a demonstração do Teorema de Little, que é válido para qualquer disciplina de serviço.

Exemplo 3

Considere uma rede de comunicações cujo tráfego de pacotes de dados pode ser modelado por uma fila M/M/1.

A taxa de chegada de pacotes é igual a $\lambda = 2$ pacotes por segundo e deseja-se ter menos de 5 pacotes em 99% do tempo.

Calcule:

a) A taxa de serviço μ
b) A vazão $S = \frac{\lambda}{\mu}$
c) O tempo médio de serviço $E[y]$
d) O retardo médio no sistema $E[d]$ para $\mu = 5$ segundos.
e) O número médio de usuários $E[x]$ para $\mu = 5$ segundos.

Solução:

a) A probabilidade de ter menos de 5 pacotes em 99% do tempo pode ser calculada por

$$P(5) = \sum_{k=5}^{\infty} P_k = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5$$

$$P(5) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \leq 1 - 0{,}99 = 0{,}01$$

Logo, tem-se

$\frac{(2)^5}{0{,}01} \leq (\mu)^5 \rightarrow \mu \geq 5{,}02$ pacotes por segundo

b) Com $S = \frac{\lambda}{\mu}$ e $\mu \geq 5{,}02$ tem-se

$$\mu = \frac{\lambda}{S} \geq 5{,}02$$

Logo, obtém-se

$$\frac{\lambda}{5{,}02} \geq S \rightarrow S \leq 0{,}4$$

c) O tempo médio de serviço é dada por

$$E[y] = \frac{1}{\mu} \approx 0{,}19 \text{ segundos}$$

d) O retardo médio no sistema pode ser calculado por

$$E[d] = E[w] + E[y] = \frac{1}{\mu}\frac{S}{1-S} + \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-S},$$

em que $S = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. Nesse caso, tem-se

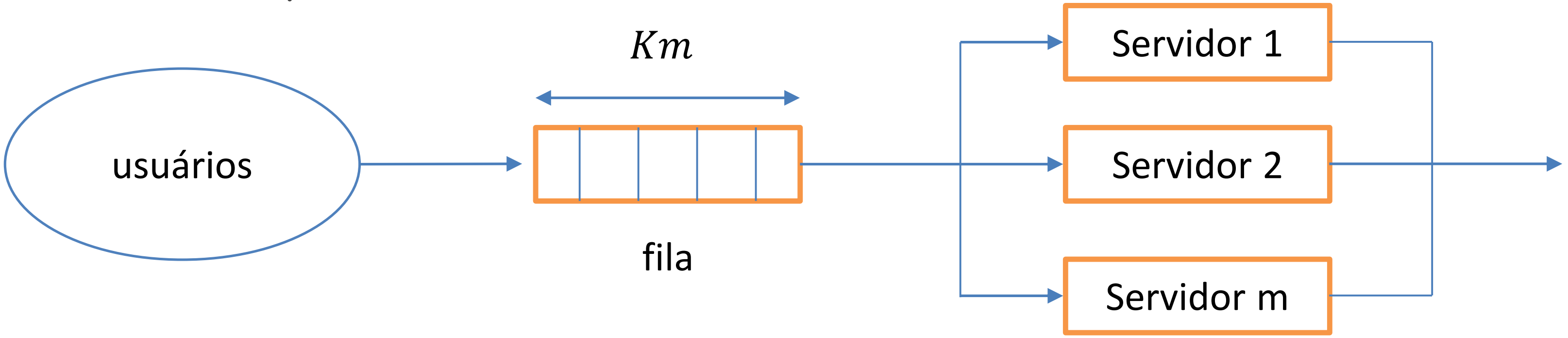
$$E[d] = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{2}{10}.\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \text{ segundo}$$

e) O número médio de usuários pode ser calculado usando-se o teorema de Little

$$E[x] = \lambda E[d] = 2\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ usuários}$$

C. Fila M/M/m

- Considere um sistema de filas em que um número infinito de usuários é atendido por m servidores, conforme ilustrado abaixo.



- As chegadas seguem um processo de Poisson com intensidade λ e o tempo de serviço y de um usuário segue uma fdp exponencial de média $\frac{1}{\mu}$.

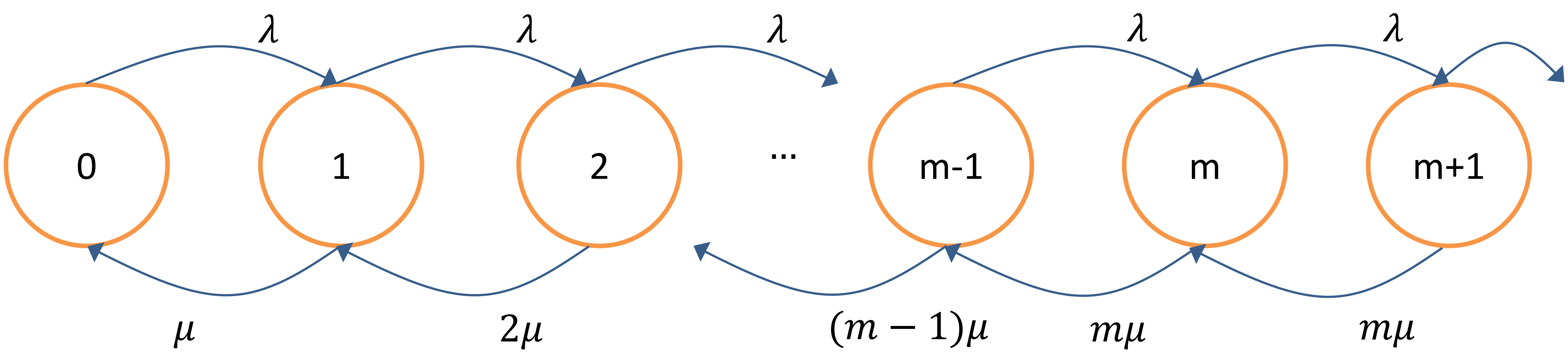
- Esse sistema de filas é conhecido como M/M/m e considera que o número máximo de usuários no sistema é infinito.

- No sistema M/M/m, o número de usuários no sistema no instante t é um processo de nascimento e morte com probabilidades de transição dadas por

$$p_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & |j-k| > 1 \\ \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k+1 \\ \mu_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k-1 \end{cases},$$

em que $\lambda_k = \lambda$ e $\mu_k = \begin{cases} k\mu, & 1 \leq k < m \\ m\mu, & k \geq m \end{cases}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

- O diagrama de estados associado ao sistema M/M/m é apresentado abaixo.



- Neste processo, as probabilidades em estado estacionário são dadas por

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0, & 1 \leq k < m \\ \dfrac{\lambda^m}{m!\mu^m} \dfrac{\lambda^{k-m}}{(m\mu)^{k-m}} P_0, & k \geq m \end{cases},$$

where

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^{k-m}}{(m\mu)^{k-m}}\right)^{-1}$$

- A vazão de um sistema M/M/m é dada por

$$S = \frac{\lambda\beta}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}$$

- O número médio de usuários no sistema ao final de um tempo muito grande é descrito por

$$E[x] = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$$

- O retardo médio do sistema pode ser obtido pelo Teorema de Little:

$$E[d] = \frac{E[x]}{\lambda}$$

- Neste sistema, duas das quantidades que refletem o desempenho do sistema são:
  - A probabilidade P_{fila} de que um usuário seja obrigado a entrar na fila.
  - O tempo médio $E[w]$ de permanência na fila.

- A probabilidade P_{fila} é descrita por

$$
\begin{aligned}
P_{fila} = P(x \geq m) &= \sum_{k=m}^{\infty} kP_k = P_0 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{m^m}{m!} S^k \\
&= P_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{j=0}^{\infty} S^{j+m} = P_0 \frac{m^m}{m!} \frac{S^m}{1-S} P_0 \\
&= \frac{(mS)^m}{(mS)^2 + m!\,(1-S) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(mS)^k}{k!}},
\end{aligned}
$$

em que os resultados acima são usados no dimensionamento de redes de comunicações.

- A expressão na última linha é conhecida por fórmula C de Erlang e representada por $C(m, \frac{1}{\mu})$.

- Para determinar o tempo médio de espera na fila, considere a v.a. z, que caracteriza o número de usuários na fila:

$$E[z] = \sum_{k=1}^{\infty} kP(z = k) = \frac{m^m}{m!} S^m P_0 \sum_{k=1}^{\infty} kS^k$$

$$= \frac{m^m}{m!} S^m P_0 \frac{S}{(1-S)^2} = \frac{S}{(1-S)} P_{fila},$$

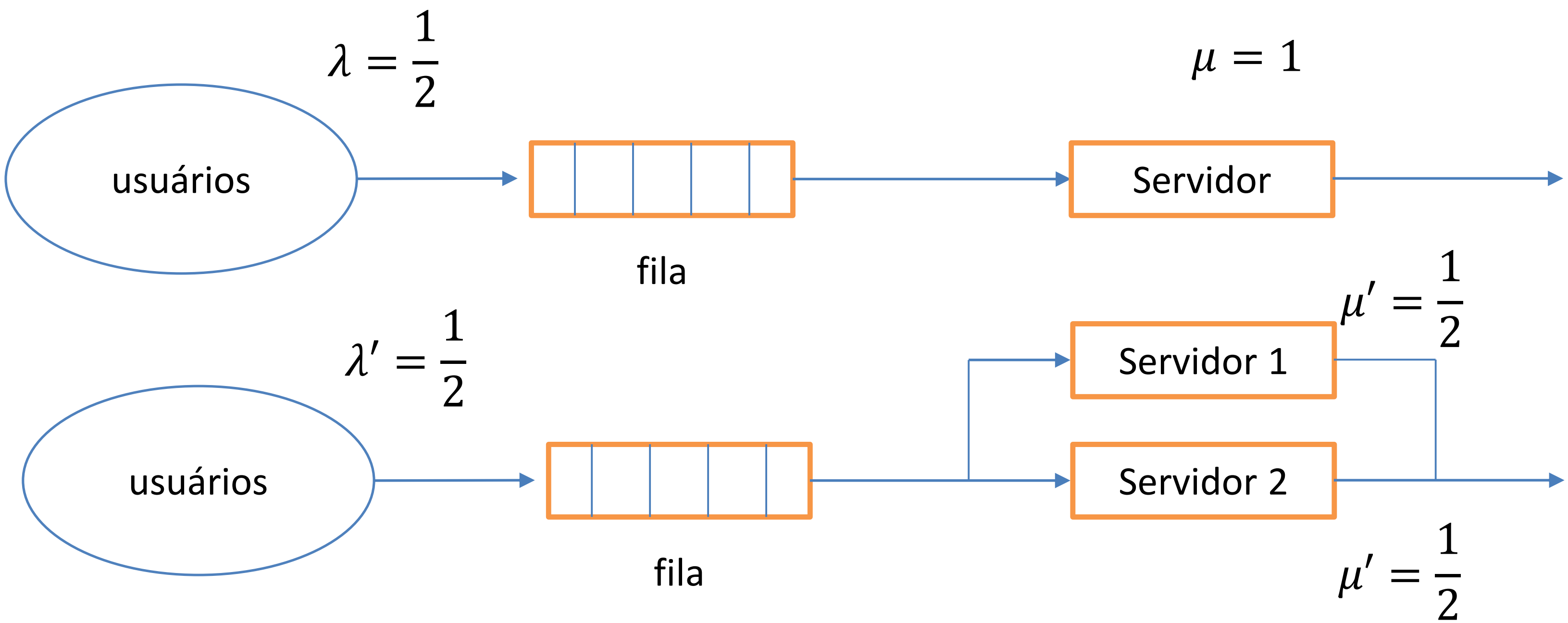
em que $P(z = k) = \begin{cases} P(0 \leq x \leq m), & k = 0 \\ P(x = k + m), & k = 1,2,\ldots \end{cases}$.

- Para obter o tempo médio de espera na fila emprega-se o Teorema de Little, o que resulta

$$E[w] = \frac{1}{\lambda} \frac{S}{(1-S)} P_{fila}$$

Exemplo 4

Considere os sistemas M/M/1 e M/M/m, em que $m = 2$, descritos por



Calcule o tempo médio de espera $E[w]$ e de atraso $E[d]$ para os sistemas.

Solução:

Para o sistema M/M/1 tem-se

$$S = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$$

$E[w] = \frac{S}{(1-S)} \frac{1}{\mu} = 1$ segundo

$E[d] = E[w] + E[y] = \frac{S}{(1-S)} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = 2$ segundos

Para o sistema M/M/2 tem-se com $\lambda' = \frac{1}{2}$ e $\mu' = \frac{1}{2}$

$$S' = \frac{\lambda\prime}{2\mu\prime} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de um sistema vazio com $m = 2$ é

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda'}{\mu'} + \left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^2 \frac{m}{1 - S'}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$P_{fila} = P(x \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} kP_k = P_0 \frac{m^m}{m!} \frac{S'^m}{1 - S'} P_0 = \frac{1}{3}$$

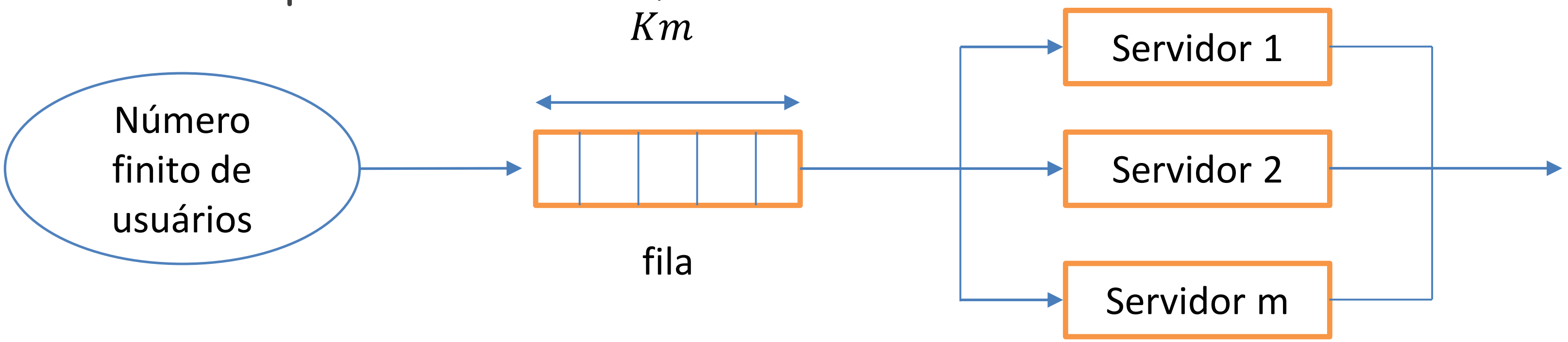
$E[w'] = \frac{S\prime}{(1-S\prime)} \frac{1}{\lambda\prime} P_{fila} = \frac{2}{3}$ segundo

$E[d'] = E[w'] + E[y'] = \frac{S\prime}{(1-S\prime)} \frac{1}{\lambda\prime} P_{fila} + \frac{1}{\mu\prime} = \frac{8}{3}$ segundos

O sistema M/M/2 presta um serviço com dois servidores a uma taxa mais baixa. Ocorre que o tempo de espera na fila $E[w'] < E[w]$ mas $E[d'] > E[d]$

C. Sistemas de filas com perdas

- Considere um sistema de filas em que um número finito de usuários é atendido por m servidores, conforme ilustrado abaixo.



- As chegadas seguem um processo de Poisson com intensidade λ e o tempo de serviço y de um usuário segue uma fdp exponencial de média $\frac{1}{\mu}$.

- Esse sistema de filas é conhecido como M/M/m/K e considera que o número máximo de usuários no sistema é finito e igual a K.

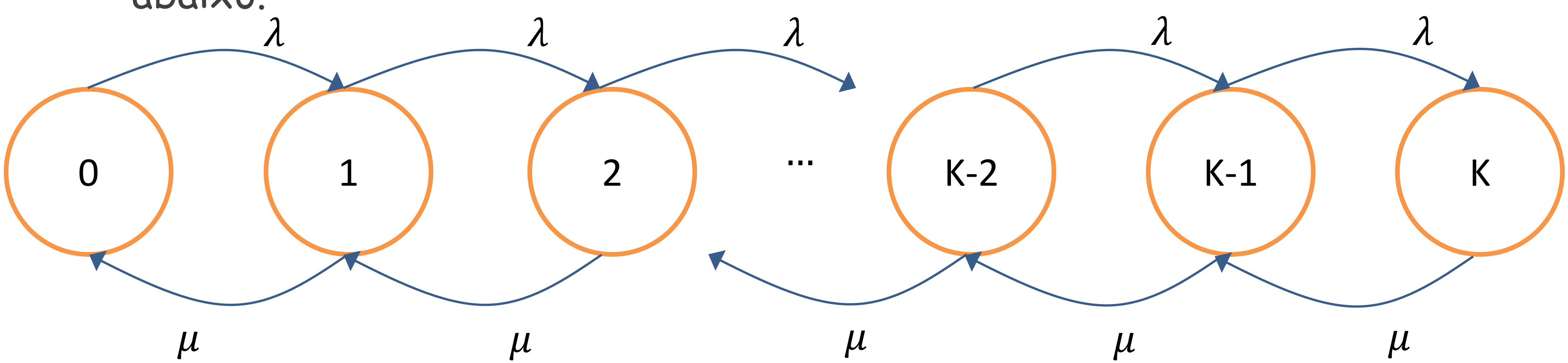
- Qualquer usuário que chegue ao sistema e o encontre lotado não será atendido ou será perdido.

- No sistema M/M/1/K, o número de usuários no sistema no instante t é um processo de nascimento e morte com probabilidades de transição dadas por

$$p_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & |j-k| > 1 \\ \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k+1 \\ \mu_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k-1 \end{cases},$$

em que $\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & 1 \leq k < K \\ 0, & k \geq K \end{cases}$ e $\mu_k = \begin{cases} \mu, & 1 \leq k \leq K \\ 0, & k > K \end{cases}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

- O diagrama de estados associado ao sistema M/M/1/K é apresentado abaixo.



- No sistema M/M/1/K, as probabilidades em estado estacionário são dadas por

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & k \leq K \\ 0, & k > K \end{cases}$$

em que $P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1} = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$ é obtida a partir da expressão para a progressão geométrica $\sum_{k=0}^{m-1}(a+kr)q^k = \frac{a-(a+(m-1)r)q^m}{1-q} + \frac{rq\left(1-q^{m-1}\right)}{(1-q)^2}$.

- A probabilidade de perda, P_{perda}, de um usuário não ser atendido é dada por

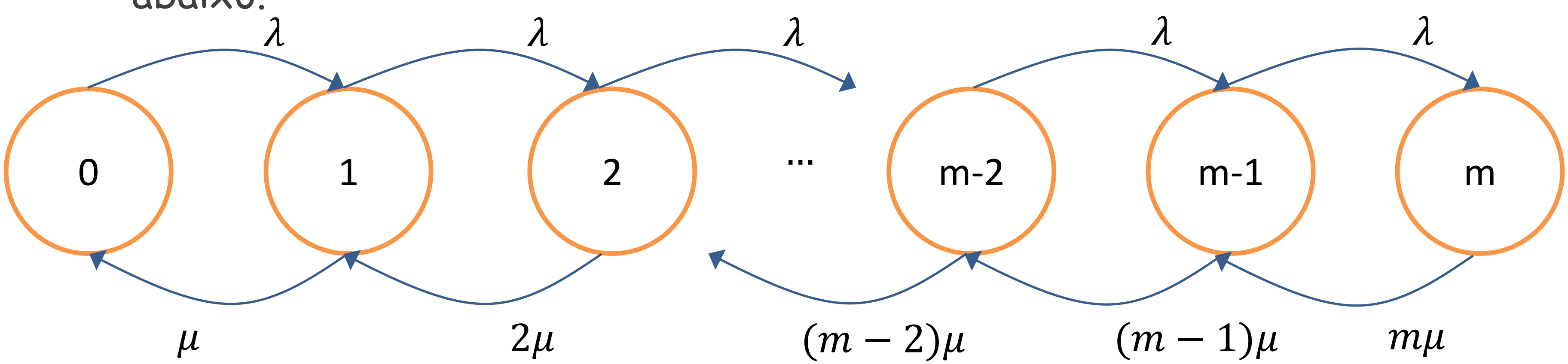
$$P_{perda} = P_K = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$$

- No sistema M/M/m/m, o número de usuários no sistema no instante t é um processo de nascimento e morte com probabilidades de transição dadas por

$$p_{kj}(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t), & |j-k| > 1 \\ \lambda_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k+1 \\ \mu_k \Delta t + o(\Delta t), & j = k-1 \end{cases},$$

em que $\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & 1 \leq k < m \\ 0, & k \geq m \end{cases}$ e $\mu_k = \begin{cases} k\mu, & 1 \leq k \leq m \\ 0, & k > m \end{cases}$, $k = 0,1,2,\ldots$.

- O diagrama de estados associado ao sistema M/M/m/m é apresentado abaixo.



- No sistema M/M/m/m, as probabilidades em estado estacionário são dadas por

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}, & k \leq m \\ 0, & k > K \end{cases}$$

em que $P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right)^{-1}$.

- A probabilidade de perda, P_{perda}, de um usuário não ser atendido é dada por

$$P_{perda} = P_m = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}},$$

em que o resultado acima é muito usado no dimensionamento de redes de telefonia e é conhecido por formula B de Erlang com notação $B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Exemplo 5

Um provedor de serviços de comunicação possui $m = 5$ enlaces de transmissão de 1 Mbits/s para videoconferências entre duas empresas.

Suponha que cada videoconferência requeira 1 Mbits/s e tenha duração media de 1 hora. Além disso, as demandas por videoconferências chegam de acordo com um processo de Posson com taxa $\lambda = 3$ chamadas por hora.

Calcule a probabilidade de perda (ou bloqueio ou não atendimento) devido à falta de linhas.

Solução:

A vazão por servidor descrita por $S = \frac{\lambda}{\mu}$ é dada por

$$S = \frac{\lambda}{\mu} = 3$$

A probabilidade de perda com $m = 5$ é dada por

$$P_{perda} = P_m = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}$$

$$= (3)^5 \frac{1}{5!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{5} (3)^k \frac{1}{k!}} = 0{,}11 \text{ ou } 11\%$$