Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

V. Vetores Gaussianos

- Neste capítulo, a noção de varíavel aleatória Gaussiana é estendida ao caso multivariável.

- A importância da fdp Gaussiana se deve ao fato de que muitos fenômenos físicos podem ser descritos por um modelo probabilístico Gaussiano.

- Em particular, o teorema do limite central dá suporte ao emprego da fdp Gaussiana assim como a sua simplicidade matemática.

Vetor Gaussiano

- Definição 1: vetor Gaussiano

Diz-se que um vetor aleatório $\boldsymbol{x}$ é Gaussiano, ou de forma equivalente, que suas componentes são variáveis aleatórias conjuntamente Gaussianas, quando a v.a. real

$$z = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$$

é Gaussiana para qualquer vetor n-dimensional $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

A. Função característica de um vetor Gaussiano

- Para determinar a função característica do vetor Gaussiano, observe que a v.a. $z = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$ é Gaussiana com média dada por

$$m_z = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{m}_x$$

e variância descrita por

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= E[(z - m_z)^2] \\ &= E[\boldsymbol{a}^T (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)^T \boldsymbol{a}] \\ &= \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K}_x \boldsymbol{a},\end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{m}_x$ e $\boldsymbol{K}_x$ representam, respectivamente, o vetor média e a matriz covariância do vetor $\boldsymbol{x}$.

PUC RIO

- Tem-se então a partir de $M_x(v) = e^{jvm}e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}}$ a expressão dada por

$$M_Z(v) = e^{jvm_Z}e^{-\frac{\sigma_Z^2 v^2}{2}} = e^{jv\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{v\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{a}v}{2}}$$

- Usando-se $m_Z = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x$ e $M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}}M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v})$ (propriedade 3 de funções características de vetores aleatórios) pode-se escrever

$$M_Z(v) = M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}v)$$

- Comparando-se $M_Z(v) = e^{jv\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{v\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{a}v}{2}}$ e $M_Z(v) = M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}v)$, e considerando-se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}v$, chega-se a

$$M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{v}}{2}},$$

que corresponde á função característica de um vetor Gaussiano $\boldsymbol{x}$ de média $\boldsymbol{m}_x$ e matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$.

Propriedades

1) Se x é um vetor Gaussiano então o vetor y definido por

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

é também Gaussiano.

Demonstração:

Observe $M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = e^{jv\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T K_x \boldsymbol{v}}{2}}$ e considere o uso de $M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}}M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v})$, o que leva à obtenção de

$$\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) &= e^{j(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b})}M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}) \\
&= e^{j(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b})}e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}}{2}} \\
&= e^{j(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x)}e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}}{2}}
\end{aligned}$$

Considerando-se o vetor média $\boldsymbol{m}_y = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x + \boldsymbol{b}$ e a matriz covariância $\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{A}$, tem-se

$$M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{m}_y}e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T K_y \boldsymbol{v}}{2}},$$

o que mostra que $\boldsymbol{y}$ é um vetor Gaussiano.

2) Se as componentes de um vetor Gaussiano são descorrelacionadas duas a duas, então elas são também estatisticamente independentes

$$k_{x_i x_j} = \begin{cases} \sigma_{x_i}^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

o que significa que a matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ é diagonal.

Neste caso, tem-se

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{K}_x \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2 v_i^2$$

Demonstração:

Substituindo-se $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{K}_x \boldsymbol{v}$ em

$$
\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) &= e^{j\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{m}_x} e^{-\frac{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{K}_x \boldsymbol{v}}{2}} \\
&= e^{j\sum_{i=1}^{n} v_i m_{x_i}=} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \sigma_{x_i}^2}{2}}
\end{aligned}
$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) &= \prod_{i=1}^{n} e^{j v_i m_{x_i}} e^{-\frac{v_i^2 \sigma_{x_i}^2}{2}} \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(v_i)
\end{aligned}
$$

o que mostra a independência estatística das componentes de $\boldsymbol{x}$.

Exemplo 1

Considere um vetor Gaussiano $\boldsymbol{x} = [x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n]^{\boldsymbol{T}}$ e um vetor n-dimensional $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ com componentes iguais a 1. O vetor Gaussiano tem componentes estatisticamente independentes com médias $\mu_1 \; \mu_2 \; \dots \; \mu_n$ e variâncias $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$. Considere a v.a. $z = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$ e calcule:

a) A média de z
b) A variância de z
c) A função característica de z
d) Se as médias e variâncias das componentes de $\boldsymbol{x}$ forem idênticas calcule novamente os itens a), b) e c)

Solução:

a)

$$z = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$m_z = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x = \sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

b)

$$\sigma_z^2 = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

c)

$$M_z(v) = e^{jvm_z}e^{-\frac{\sigma_z^2 v^2}{2}} = e^{jv\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{m}_x}e^{-\frac{v\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{a}v}{2}} = e^{jv\sum_{i=1}^{n}\mu_i}e^{-\frac{v^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{2}}$$

d) Se as médias e variâncias forem idênticas tem-se

$$m_z = n\mu,\ \sigma_z^2 = n\sigma^2 \text{ e } M_z(v) = e^{jvn\mu}e^{-\frac{v^2 n\sigma^2}{2}}$$

B. Função densidade de probabilidade de um vetor Gaussiano

- Nesta seção, o objetivo é derivar matematicamente a fdp de um vetor Gaussiano $\boldsymbol{x}$ de média $\boldsymbol{m}_x$ e matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$.

- Em particular, serão utilizados os conceitos de transformação linear, função de v.a., valor esperado e de vetores Gaussianos.

- A expressão da fdp de um vetor Gaussiano a ser obtida é dada por

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_x}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)^T \boldsymbol{K}_x^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)},$$

que depende apenas de $\boldsymbol{m}_x$ e $\boldsymbol{K}_x$.

Exemplo 2

O vetor $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^{\boldsymbol{T}}$ é conjuntamente Gaussiano e tem médias iguais a zero e matriz covariância dada por

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & k_{x_1x_2} & k_{x_1x_3} \\ k_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & k_{x_2x_3} \\ k_{x_3x_1} & k_{x_3x_2} & \sigma_{x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a fdp conjunta de $\boldsymbol{x}' = [x_1\ x_3]^{\boldsymbol{T}}$

Solução:

O vetor média e a matriz covariância de $\boldsymbol{x}' = [x_1 \; x_3]^{\boldsymbol{T}}$ são dados por

$$\boldsymbol{m}_{x'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{K}_{x'} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & k_{x_1 x_3} \\ k_{x_3 x_1} & \sigma_{x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1 \end{bmatrix}$$

A fdp conjunta de $\boldsymbol{x}' = [x_1 \; x_3]^{\boldsymbol{T}}$ é dada por

$$p_{\boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{X}') = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det \boldsymbol{K}_{x'}}} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{X}'^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{K}_x^{-1} \boldsymbol{X}'} = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{0{,}91}} e^{-\frac{1}{2}[X_1 \; X_3]^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [X_1 \; X_3]},$$

where $\det \boldsymbol{K}_{x'} = 0{,}91$.

Fdp de um vetor Gaussiano

- Considere um vetor aleatório Gaussiano n-dimensional $\boldsymbol{x}$ com média $\boldsymbol{m}_x$ e matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$.

- Deseja-se determinar a expressão da fdp conjunta $p_x(\boldsymbol{X})$ do vetor $\boldsymbol{x}$ a partir da transformação dada por

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

em que a matriz $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz cujas linhas são os autovetores $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ da matriz $\boldsymbol{K}_x$ normalizados.

- Este vetor é também Gaussiano e possui componentes estatisticamente independentes.

- Considerando-se a matriz $\boldsymbol{P}$, tem-se

$$\boldsymbol{m}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{m}_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^T\boldsymbol{m}_x \\ \boldsymbol{e}_2^T\boldsymbol{m}_x \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^T\boldsymbol{m}_x \end{bmatrix}$$

- Neste caso, a matriz covariância de $\boldsymbol{y}$ é dada por

$$\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{\Lambda}_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

em que $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de $\boldsymbol{K}_x$ associados aos autovetores $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$

- Desta forma, as componentes $\{y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\}$ do vetor $\boldsymbol{y}$ são todas Gaussianas, estatisticamente independentes e com fdps dadas por

$$p_{y_i}(Y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_i}} e^{-\frac{1}{2\lambda_i}\left(Y_i - \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{m}_x\right)^2}$$

- Neste caso, a fdp conjunta do vetor $\boldsymbol{y}$ pode ser obtida por $p_{y_1 y_2 \dots y_n}(Y_1 Y_2 \dots Y_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{y_i}(Y_i)$, ou seja,

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = p_{y_1 y_2 \dots y_n}(Y_1 Y_2 \dots Y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_{y_i}(Y_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\left(Y_i - \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{m}_x\right)^2}$$

- Observando-se que

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det \boldsymbol{K}_y$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\left(Y_i - \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{m}_x\right)^2 = \left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m}_y\right)^T \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{y}}^{-1}\left(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{m}_y\right)$$

pode-se escrever

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_y}} e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{m}_y\right)^T \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{y}}^{-1}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{m}_y\right)}$$

em que a fdp conjunta acima pode ser obtida usando-se

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{p_x(\mathbf{X})}{|\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{g}}(\mathbf{X})|}\Big\lfloor \boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Y})\, \mathbf{1}_{C_g}(\boldsymbol{Y}),$$

- A partir da definição da matriz $\boldsymbol{P}$ e de $\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{e}_i = 1, \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{e}_j = 0,\ i, j = 1,2, \dots, n,$ $i \neq j$, tem-se

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} \ \text{ e } \ \det(\boldsymbol{P})\det(\boldsymbol{P}^T) = 1$$

- Como $\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P}^T)$, tem-se ainda

$$\det(\boldsymbol{P}) = \pm 1$$

- Além disso, $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$ permite escrever

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$$

- No caso da transformação linear

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{y}$$

o Jacobiano da transformação é igual a

$$J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{Y}) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial Y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial Y_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial Y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial Y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial Y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial Y_n} \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{P})$$

- Usando-se $\det(\boldsymbol{P}) = \pm\,1$, tem-se

$$|J_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{Y})| = 1$$

- A fdp do vetor x pode ser obtida a partir da fdp conjunta $p_y(\boldsymbol{Y})$ usando

$$p_y(\boldsymbol{Y}) = \frac{p_x(\mathbf{X})}{\left|\boldsymbol{J}_g(\boldsymbol{X})\right|}\Big|_{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Y})} \mathbf{1}_{C_g}(\boldsymbol{Y})$$

em que se considera $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T$ e $|J_g(\boldsymbol{Y})| = 1$.

- Logo, tem-se

$$p_x(\boldsymbol{X}) = p_y(\boldsymbol{Y})\big|_{\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{X}} = p_y(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{X})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_y}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)^T \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{K}_y^{-1} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)}$$

- Como $\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^T$ tem-se a partir de $\det(\boldsymbol{P}) = \pm\, 1$ que

$$\det \boldsymbol{K}_y = \det(\boldsymbol{P}) \det \boldsymbol{K}_x \det \boldsymbol{P}^T = \det \boldsymbol{K}_x$$

- Por outro lado, $\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^T$ permite escrever

$$\boldsymbol{K}_y^{-1} = \boldsymbol{P}^{T^{-1}}\boldsymbol{K}_x^{-1}\boldsymbol{P}^{\,-1}$$

- Pré-multiplicando a equação acima por $\boldsymbol{P}^T$ e pós-multiplicando por $\boldsymbol{P}$, tem-se

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{K}_y^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_y^{-1} = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}^{T^{-1}}\boldsymbol{K}_x^{-1}\boldsymbol{P}^{\,-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_x^{-1}$$

- Finalmente, substituindo-se $\det \boldsymbol{K}_y = \det \boldsymbol{K}_x$ e $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{K}_y^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}_x^{-1}$ em $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})$, tem-se

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_x}}\, e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)^T\boldsymbol{K}_x^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}_x)}$$

Exemplo 3

Seja $\boldsymbol{x} = [x\ y\ z]^T$ um vetor Gaussiano de média nula e matriz covariância

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & \sigma_y^2 & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

Compare a fdp da v.a. z com a fdp condicional de z dado que $x = X$ e $y = Y$.

Solução:

A determinação de $p_z(Z)$ é imediata uma vez que da matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ obtém-se diretamente $\sigma_z^2 = 3$. Como a média de z é nula, tem-se

$$p_z(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{Z^2}{6}}$$

Para determinar $p_{z|x=X,y=Y}(Z) = \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})}{p_{xy}(X,Y)} = \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})}{p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{U})}$ em que $\boldsymbol{u} = [x\ y]^T$.

Pela propriedade de vetores Gaussianos, o vetor $\boldsymbol{u}$ também é Gaussiano com média nula e $\boldsymbol{K}_u = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Logo, tem-se

$$p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{U}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_u}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{U})^T \boldsymbol{K}_u^{-1}\boldsymbol{U}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{16}} e^{-\frac{1}{32}[X\ \ Y]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}$$

em que $\boldsymbol{K}_u^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

Por outro lado, observando-se que

$$\boldsymbol{K}_x^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix} \text{ e } \det \boldsymbol{K}_x = 32$$

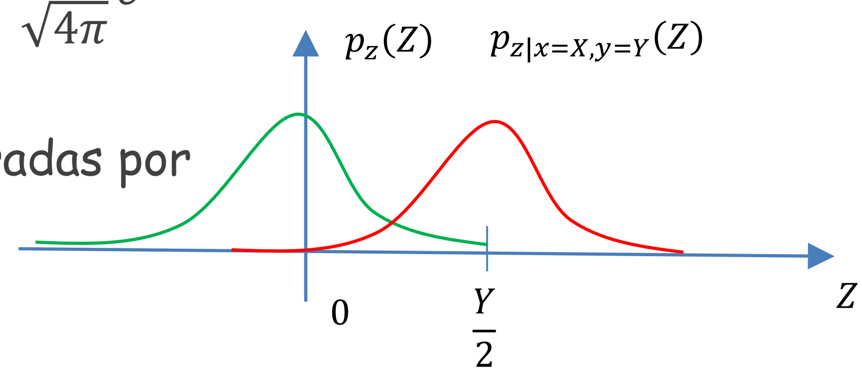
obtém-se

$$p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_x}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X})^T \boldsymbol{K}_x^{-1}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{32}} e^{-\frac{1}{64}[X\ Y\ Z]\begin{bmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 14 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}}$$

Substituindo-se $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})$ e $p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{U})$ em $p_{z|x=X,y=Y}(Z) = \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})}{p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{U})}$, tem-se

$$p_{z|x=X,y=Y}(Z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(Z-\frac{Y}{2})^2}{4}}$$

As fdps $p_{z|x=X,y=Y}(Z)$ e $p_z(Z)$ são ilustradas por



Exemplo 4

Sejam x e y duas v.a.s conjuntamente Gaussianas, estatisticamente independentes, com médias $m_x = 100$ e $m_y = 50$ e variâncias $\sigma_x^2 = 48$ e $\sigma_y^2 = 27$.

Determine a probabilidade de a soma $z = x + y$ exceder 160.

Solução:

Note que o vetor $\mathrm{z} = [x\ y]^T$ é Gaussiano com vetor média $\boldsymbol{m}_z = [100\ \ 50]^T$ e matriz covariância $\boldsymbol{K}_z = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$, resultando-se na fdp conjunta

$$p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{Z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \boldsymbol{K}_z}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m}_z)^T \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m}_z)} = \frac{1}{2\pi\ 36} e^{-\frac{1}{2}[X-100\ Y-50]\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\begin{bmatrix} X-100 \\ Y-50 \end{bmatrix}}$$

A probabilidade desejada poderia ser determinada integrando-se $p_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{Z})$ ao longo da região definida por

$$\mathcal{R} = \{\boldsymbol{z} \in \ \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}} : x + y > 160\}$$

Entretando, o resultado pode ser mais facilmente obtido notando-se que a variável $\mathrm{z} = x + y$ é Gaussiana com média e variância dadas por

$$m_z = m_x + m_y = 150$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 75$$

Tem-se então

$$P(\mathrm{z} = x + y > 160) = P(\mathrm{z} > 160)$$

$$= \int_{160}^{\infty} p_z(Z) dZ$$

$$= \int_{160}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{75}} e^{-\frac{1}{150}(Z-150)^2} dZ$$

$$= Q\left(\frac{10}{\sqrt{75}}\right) = 0{,}125$$