Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

IV. Valor esperado

- Neste capítulo, examina-se o conceito de valor esperado de v.a.s.

- Em particular, são estudados o valor esperado de:
  - uma v.a. real,
  - de um vetor aleatório,
  - condicional e
  - matrizes aleatórias.

- Além disso, são examinados os conceitos de
  - desigualdades e
  - funções características.

- O valor esperado de uma v.a. y é definido pela forma integral

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_y(Y) dY$$

em que o valor esperado $E[.]$ é um operador real, definido sobre o espaço $\mathcal{F}$ das v.a.s reais, que associa a uma v.a. real $y \in \mathcal{F}$ o número real $E[y]$ dado pela definição acima.

- Desta forma, tem-se matematicamente

$$\begin{aligned} E[.]: \quad & \mathcal{F} \to \mathbb{R} \\ & y \to E[y] \end{aligned}$$

A. Valor esperado de função de v.a. real

- Nesta seção, estuda-se o caso específico em que a v.a. y é função de uma outra v.a. real x, ou seja,

$$y = g(x)$$

em que um resultado importante é o Teorema Fundamental do Valor Esperado.

- Teorema Fundamental do Valor Esperado:

Se $y = g(x)$ então

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_y(Y) dY = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) p_x(X) dX$$

Demonstração do Teorema Fundamental do Valor Esperado:

Considerando-se a propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_1 \dots x_n}(U_1, \dots, X_j, \dots, U_n) dU_1 \dots dU_{j-1} dU_{j+1} \dots dU_n = p_{x_j}(X_j)$$

e a definição $E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_y(Y) dY$ pode-se escrever

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} Y \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Y) dX dY$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} Y \int_{-\infty}^{\infty} p_{y|x=X}(Y) p_x(X) dX dY$$

Como $y = g(x)$ quando a v.a. x assume o valor X, a v.a. y assume o valor $\mathrm{g}(X)$.

Isto significa que, dado $x = X$, y passa a ser uma v.a. discreta que pode assumir um único valor $g(x)$

Logo, tem-se

$$p_{y|x=X}(Y) = \delta(Y - g(X))$$

Substituindo-se a expressão acima em $E[y]$ obtém-se:

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) \int_{-\infty}^{\infty} Y\delta(Y - g(X))dYdX$$

Usando-se a propriedade das funções impulso $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ na expressão acima obtém-se

$$E[y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} Yp_y(Y)dY = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)p_x(X)dX$$

A expressão acima nos permite chegar à definição de quantidades importantes na teoria das v.a.s.

i. Média

- A média m_x de uma v.a. x é definida a partir de $\int_{-\infty}^{\infty} g(X)p_x(X)dX$ tomando-se $g(X) = x$.

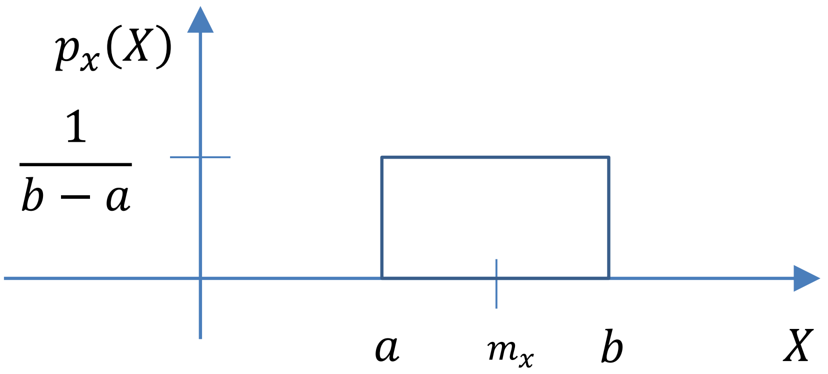
- Logo, tem-se

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} Xp_x(X)dX$$

Exemplo 1

Calcule a média de uma v.a. uniforme cuja fdp é dada por

$$p_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq X \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



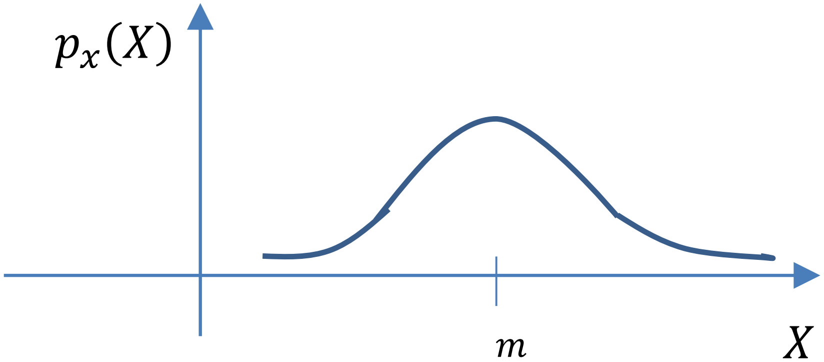
Solução:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} X\, p_x(X) dX = \int_a^b X \frac{1}{b-a} dX = \frac{X^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Exemplo 2

Calcule a média de uma v.a. Gaussiana cuja fdp é dada por

$$p_x(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$



Solução:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} X\, p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX$$

Fazendo-se uma mudança de variável com $\alpha = X - m$ na integral, obtém-se

$$m_x = m \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\alpha}_{1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\alpha}_{0} = m$$

Exemplo 3

Calcule a média de uma v.a. discreta x, que assume os valores $\{X_1, X_2, \dots\}$ com probabilidade $P(x = X_i), i = 1,2, \dots$ e cuja fdp é dada por

$$p_x(X) = \sum_i P(x = X_i)\delta(X - X_i)$$

Solução:

A média é dada por

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} X\, p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} X \sum_i P(x = X_i)\delta(X - X_i)\, dX$$

$$= \sum_i P(x = X_i) \int_{-\infty}^{\infty} X\, \delta(X - X_i)\, dX = \sum_i X_i P(x = X_i)$$

Observações

- Uma interpretação para a média de uma v.a. pode ser obtida fazendo-se uso do conceito de probabilidade como limite da frequência relativa.

- Considere uma v.a. discreta x que assume valores em $\Omega_x = \{X_1, X_2, \dots\}$ e suponha que a experiência associada a esta v.a. tenha sido realizada n vezes.

- Seja n_{X_i} o número de vezes dentre as n em que o evento $\{x = X_i\}$ ocorreu.

- De acordo com o conceito de probabilidade como o limite da frequência relativa, tem-se

$$P(x = X_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{X_i}}{n}$$

- Para a média tem-se

$$m_x = \lim_{n\to\infty} \sum_i \frac{X_i n_{X_i}}{n}$$

ii. Variância e desvio padrão

- A variância σ_x^2 de uma v.a. x é definida através de

$$E[y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) p_x(X) dX$$

tomando-se $g(X) = (X - m_x)^2$.

- Logo, tem-se

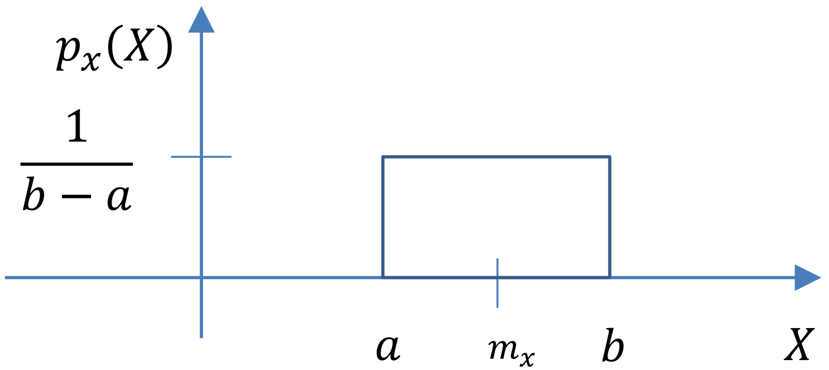
$$\sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^2 p_x(X) dX$$

em que σ_x é o desvio padrão associado à dispersão em torno de sua média.

Exemplo 4

Calcule a variância de uma v.a. uniforme definida por

$$p_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq X \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Solução:

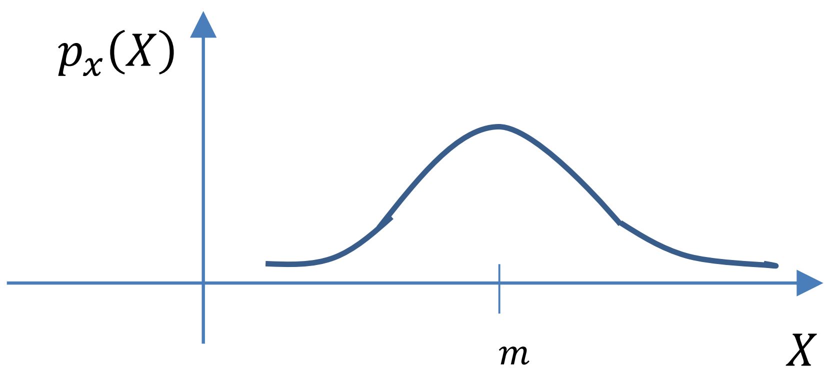
$$\sigma_x^2 = E[(x-m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-m_x)^2 p_x(X) dX$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(X - \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{m_x}\Big)^2 \frac{1}{b-a} dX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo 5

Calcule a variância de uma v.a. Gaussiana definida por

$$p_x(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$



Solução:

$$\sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX$$

Como $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = 1$ tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = \sqrt{2\pi\sigma}$$

Derivando-se ambos os lados com relação a σ, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(X-m)^2}{2\sigma^3} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (X-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = \sigma^2$$

Logo, tem-se

$$\sigma_x^2 = \sigma^2$$

Exemplo 6

Calcule a variância de uma v.a. discreta x que assume os valores $\{X_1, X_2, \dots\}$ com probabilidade $P(x = X_i), i = 1,2, \dots$ e cuja fdp é dada por

$$p_x(X) = \sum_i P(x = X_i)\delta(X - X_i)$$

Solução:

A variância é descrita por

$$\sigma_x^2 = E[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^2 \sum_i P(x = X_i)\delta(X - X_i)\, dX$$

$$= \sum_i P(x = X_i) \int_{-\infty}^{\infty} (X - m_x)^2 \delta(X - X_i) dX$$

Usando-se a propriedade da função impulso obtém-se

$$\sigma_x^2 = \sum_i (X_i - m_x)^2 P(x = X_i)$$

Observações

- Considerando-se o conceito de probabilidade como o limite da frequência relativa, tem-se

$$P(x = X_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{X_i}}{n}$$

e

$$\sigma_x^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_i \frac{(X_i - m_x)^2}{n} n_{X_i}$$

iii. Valor médio quadrático

- O valor médio quadrático $E[x^2]$ de uma v.a. x é definido através de

$$E[y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)p_x(X)dX$$

tomando-se $g(x) = x^2$.

- Logo, tem-se

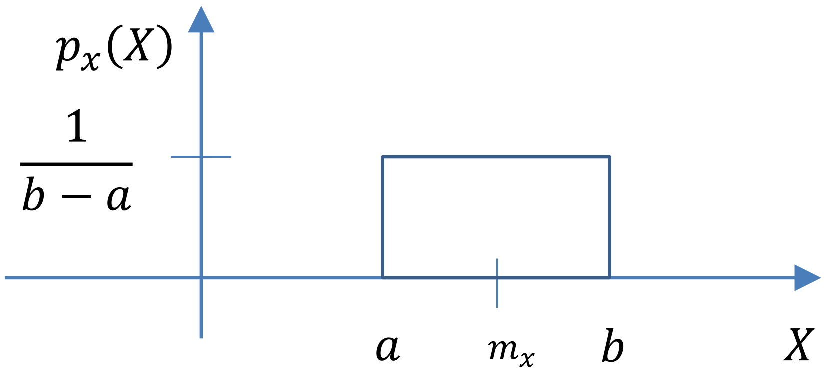
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 p_x(X)dX$$

- O conceito de valor médio quadrático é importante e bastante usado em problemas de otimização e estimação de parâmetros.

Exemplo 7

Calcule o valor médio quadrático de uma v.a. uniforme dada por

$$p_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq X \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Solução:

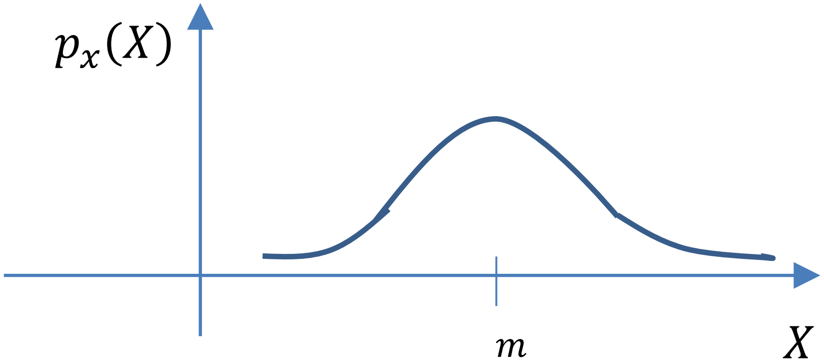
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \frac{1}{b-a} dX$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

Exemplo 8

Calcule o valor médio quadrático de uma v.a. Gaussiana dada por

$$p_x(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$



Solução:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 p_x(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX$$

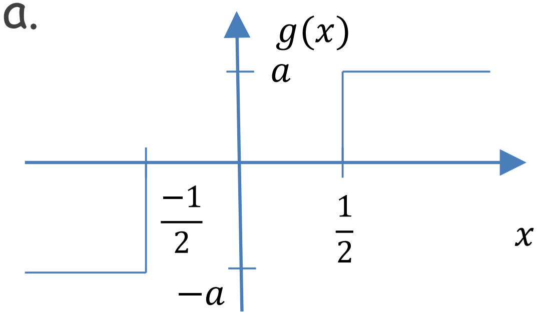
Observe que $\int_{-\infty}^{\infty} (X^2 + m^2 - 2Xm) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = \sigma^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX = \sigma^2 + 2\text{m} \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX - m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX$$

$$E[x^2] = \sigma^2 + 2m^2 - m^2 = \sigma^2 + m^2$$

Exemplo 9

Considere o quantizador de 3 níveis cuja operação é ilustrada abaixo. A entrada do quantizador x é uma v.a. uniforme no Intervalo $(-1,1]$.



Determine o valor do parâmetro a que caracteriza 2 dos níveis de quantização de modo a minimizar o valor médio quadrático do erro de quantização dado por

$$e = x - q(x),\ \text{em que } q(x) = \begin{cases} -a, & -\infty < X \leq -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2} \\ a, & \frac{1}{2} < X < \infty \end{cases}$$

Solução:

$$E[e^2] = E\left[\left(x - q(x)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(X - q(X)\right)^2 p_x(X)dX$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(X + a)^2 dX + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} X^2 dX + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}(X - a)^2 dX$$

$$= \frac{1}{2}[a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{2}{3}]$$

O valor de a que minimiza $E[e^2]$ pode ser obtido calculando-se a derivada de $E[e^2]$ com relação a a.

$$\frac{dE[e^2]}{da} = \frac{d}{da}\frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{2}{3}\right] = \mathrm{a} - \frac{3}{4} = 0 \ \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

B. Valor esperado de função de vetor aleatório

- Nesta seção, estuda-se o conceito de valor esperado de uma v.a. y na situação em que y é uma função de várias v.a.s, ou seja,

$$y = g(\boldsymbol{x})$$

- O valor esperado de y pode ser calculado por

$$E[y] = E[g(\boldsymbol{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{X}) p_x(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X},$$

o que constitui o caso geral do Teorema Fundamental do Valor Esperado.

Demonstração:

Considera-se

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{Y} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{yx}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X} d\boldsymbol{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{Y} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y})\, p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X} d\boldsymbol{Y}$$

Observando que $p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y}) = \delta(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}))$ obtém-se

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{Y} \delta(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}))\, d\boldsymbol{Y} d\boldsymbol{X}$$

Pela propriedade da função impulso, a integral em Y é igual a $\boldsymbol{g}\,(\boldsymbol{X})$, o que resulta em

$$E[y] = E[g(\boldsymbol{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\boldsymbol{X})\, p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X}$$

Propriedades

i) Valor esperado de uma constante

$$E[a] = a,$$

em que a é uma constante.

.

ii) Valor esperado de um operador linear

$$E[\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i E[x_i],$$

em que $\{x_i\}$ são v.a.s e $\{a_i\}$ são constantes reais.

Demonstração:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i\right) p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} X_i p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})\, d\boldsymbol{X}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_i p_{x_i}(X_i)\, dX_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i E[x_i]$$

iii) Módulo do valor esperado

$$|E[x]| \leq E[|x|]$$

iv) Preservação da ordem do valor esperado

Sejam 2 v.a.s x e y tais que

$$x(\omega) \geq y(\omega), \qquad \forall \ \omega \in \Omega$$

então

$$E[x] \ \geq \ E[y]$$

Demonstração:

Considere a v.a. $z = x - y$ e observe que, por hipótese, $z(\omega) \geq 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$.

Sendo z uma v.a. sempre positiva, tem-se

$$E[z] = E[x - y] = \int_{-\infty}^{\infty} Z p_z(Z) dZ \geq 0$$

Finalmente, usando-se a propriedade da linearidade obtém-se

$$E[x] - E[y] \geq 0$$

v) Variáveis aleatórias estatisticamente independentes

No caso de n v.a.s estatisticamente independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ tem-se para qualquer conjunto de funções $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E[g_i(x_i)]$$

Observe que

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right) p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

Demonstração:

Como as v.a.s $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são estatisticamente independentes, tem-se

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\, p_{x_i}(X_i)\right) dX_1 dX_2 \dots dX_n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(x_i) p_{x_i}(X_i) dX_i = \prod_{i=1}^{n} E[g_i(x_i)]$$

Correlação, covariância e coeficiente de correlação

- O Teorema Fundamental do Valor Esperado permite a definição de quantidades úteis como:
  - Correlação
  - Covariância
  - Coeficiente de correlação
- A estratégia para definir essas quantidades se baseia no uso do vetor aleatório $\boldsymbol{x} = [x\ y]^T$ e no valor esperado dado por

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)p_{x,y}(X,Y)dXdY$$

- Essa quantidades (correlação, covariância e coeficiente de correlação) são usadas em inferência estatística.

i. Correlação

- A correlação r_{xy} entre 2 v.a.s x e y é definida tomando-se

$$\mathrm{g}(x, y) = xy$$

na expressão

$$\mathrm{E}[\mathrm{g}(x, y)].$$

- Logo, tem-se

$$r_{xy} = E[xy] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} XY p_{x,y}(X, Y) dX dY$$

ii. Covariância

- A covariância k_{xy} entre 2 v.a.s x e y é definida tomando-se

$$g(x,y) = (x - m_x)(y - m_y),$$

em que m_x e m_y são as médias das v.a.s x e y, respectivamente, na expressão

$$k_{xy} = E[(x - m_x)(y - m_y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X - m_x)(Y - m_y)p_{x,y}(X,Y)dXdY$$

- A correlação r_{xy} e a covariância k_{xy} entre 2 v.a.s são relacionadas por

$$k_{xy} = r_{xy} - m_x m_y$$

Demonstração de $k_{xy} = r_{xy} - m_x m_y$:

$$k_{xy} = E\left[(x - m_x)\left(y - m_y\right)\right] = E\left[xy - y m_x - x m_y + m_x\, m_y\right]$$
$$= E[xy] - m_x\, E[y] - m_y E[x] + m_x m_y$$
$$= E[xy] - m_x m_y$$

No caso em $x = y$, tem-se

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - {m_x}^2$$

Observações

- A covariância entre 2 v.a.s indica o relacionamento estatístico entre 2 v.a.s .

- Quanto maior é o valor do módulo de k_{xy} mais forte é o relacionamento estatístico entre x e y.

- Emprega-se uma quantidade normalizada para avaliar a caracterização do relacionamento estatístico máximo entre 2 v.a.s.

iii. Coeficiente de correlação

- O coeficiente de correlação ρ_{xy} entre 2 v.a.s x e y, proposto pelo matemático britânico Carl Pearson (UCL), é definido por

$$\rho_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

Em que σ_x e σ_y são os desvios padrões de x e y, respectivamente, e k_{xy} é a covariância entre eles.

- O coeficiente de correlação é adequado para indicar o grau de correlação entre 2 v.a.s.

- Propriedade:

$$|\rho_{xy}| \leq 1$$

Demonstração:

$$z = g(x,y) = \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \pm \frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2 \pm 2\,\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} \geq 0$$

Logo, o valor esperado de z é dado por

$$E[z] = E[g(x,y)] \geq 0$$

$$= \underbrace{E\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2\right]}_{1} + \underbrace{E\left[\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}_{1} \pm 2\,\underbrace{E\left[\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]}_{\frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\rho_{xy}} \geq 0$$

$$= 2 \pm 2\,\frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; -1 \leq \rho_{xy} \leq 1 \;\; \text{ou} \;\; |\rho_{xy}| \leq 1$$

Variáveis aleatórias descorrelacionadas

- Definição 1:

Duas v.a.s x e y são ditas descorrelacionadas quando

$$\rho_{xy} = 0 \quad \text{ou } k_{xy} = 0$$

- Note que com $k_{xy} = r_{xy} - m_x m_y$ é possível mostrar que $\rho_{xy} = 0$ e $k_{xy} = 0$ são equivalentes à condição

$$r_{xy} = m_x m_y$$

- É importante ressaltar que se as 2 v.a.s são estatisticamente independentes, elas são também descorrelacionadas já que

$$r_{xy} = E[xy] = E[x]E[y] = m_x m_y$$

- Entretanto, a recíproca não é verdadeira pois v.a.s descorrelacionadas não são, em geral, estatisticamente independentes.

- Considere um exemplo com 2 v.a.s x e $y = x^2$ em que x e y assumem os valores $\{-1,0,1\}$ e $\{0,1\}$, respectivamente, com probabilidades $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$e $\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$. As v.a.s x e y são correlacionadas? As v.a.s são estatisticamente independentes?

A covariância é dada por

$k_{xy} = E[xy] - E[x]E[y] = E[x^3] - E[x]E[x^2] = 0$ -> v.a.s descorrelacionadas

A probabilidade conjunta é dada por

$P(x = 1, y = 0) = 0 \neq P(x = 1)P(y = 0) = \frac{1}{9}$ -> v.a.s não são est. independentes

Variáveis aleatórias ortogonais

- Definição 2:

Duas v.a.s são ditas ortogonais quando

$$r_{xy} = 0$$

- Note que devido a $r_{xy} = m_x m_y$ 2 v.a.s descorrelacionadas serão ortogonais se e somente se pelo menos uma delas tiver média nula.

Variância da soma de variáveis aleatórias descorrelacionadas

A soma de v.a.s identicamente distribuídas e descorrelacionadas é descrita por

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

com $k_{x_i x_j} = 0, \ i \neq j$ então tem-se

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2$$

Demonstração:

$$\sigma_y^2 = E\left[\left(y - m_y\right)^2\right]$$
$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_{x_i}\right)^2\right]$$
$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - m_{x_i}\right)\left(x_j - m_{x_j}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{x_i x_j}$$

Como $k_{x_i x_j} = 0$, tem-se

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} k_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2$$

iv. Momentos conjuntos

- Os momentos conjuntos de n v.a.s $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são definidos fazendo-se

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

em que as potências $k_1, k_2, \dots, k_n$ são números inteiros positivos ou iguais a zero.

- Os momentos conjuntos são então dados por

$$E\left[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

- A soma $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ é a ordem do momento conjunto.

Observações

- $E[x_1 x_2 x_n]$, $E[x_1 x_2^2]$ and $E[x_3^3]$ são momentos de 3ª ordem.

- $E[x_1]$ é um momento de 1ª ordem.

- A correlação r_{xy} e a covariância k_{xy} entre 2 v.a.s x e y são momentos de 2ª ordem.

v. Momentos conjuntos centrais

- Os momentos conjuntos centrais de n v.a.s $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ são definidos fazendo-se

$$g(\boldsymbol{x}) = (x_1 - m_{x_1})^{k_1}\,(x_2 - m_{x_2})^{k_2} \ldots (x_n - m_{x_n})^{k_n}$$

em que as potências $k_1, k_2, \ldots, k_n$ são números inteiros positivos ou iguais a zero.

- Os momentos conjuntos são então dados por

$$E\left[(x_1 - m_{x_1})^{k_1}(x_2 - m_{x_2})^{k_2} \ldots (x_n - m_{x_n})^{k_n}\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_{x_1})^{k_1}(X_2 - m_{x_2})^{k_2} \ldots (X_n - m_{x_n})^{k_n} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

- A soma $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ é a ordem do momento conjunto central.

- A variância σ_x^2 e a covariância k_{xy} são momentos centrais de 2ª ordem.

C. Valor esperado de vetores e matrizes

- O valor esperado de um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ de comprimento n é definido como um vetor de mesma dimensão cujos componentes são os valores esperados das componentes de $\boldsymbol{y}$

$$E[\boldsymbol{y}] = \begin{bmatrix} E[y_1] \\ E[y_2] \\ \vdots \\ E[y_n] \end{bmatrix}$$

- De maneira análoga, o valor esperado de uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com dimensões n x n é definido como sendo uma matriz de mesma dimensão cujos elementos são os valores esperados dos elementos de $\boldsymbol{A}$

$$E[\boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} E[A_{11}] & \dots & E[A_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[A_{n1}] & \dots & E[A_{nn}] \end{bmatrix}$$

i) Vetor média

- O vetor média $\boldsymbol{m}_x$ de um vetor aleatório $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ é definido por

$$\boldsymbol{m}_x = E[\boldsymbol{x}]$$

$$= \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ \vdots \\ m_{x_n} \end{bmatrix}$$

ii) Matriz covariância

- A matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ de um vetor aleatório $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ é definida por

$$\boldsymbol{K}_x = E[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_x)^T]$$
$$= \begin{bmatrix} E[(x_1 - m_{x_1})^2] & E[(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})] & \dots & E[(x_1 - m_{x_1})(x_n - m_{x_n})] \\ E[(x_2 - m_{x_2})(x_1 - m_{x_1})] & E[(x_2 - m_{x_2})^2] & \dots & E[(x_2 - m_{x_2})(x_n - m_{x_n})] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(x_n - m_{x_n})(x_1 - m_{x_1})] & E[(x_n - m_{x_n})(x_2 - m_{x_2})] & \dots & E[(x_n - m_{x_n})^2] \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & k_{x_1x_2} & \dots & k_{x_1x_n} \\ k_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \dots & k_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{x_nx_1} & k_{x_nx_2} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix}$$

em que a diagonal principal é formada pelas variâncias dos elementos de x e os demais correspondem às covariâncias entre pares de elementos de x.

Exemplo 10

Considere 2 v.a.s x e y com médias iguais a zero, variâncias iguais a σ^2 e correlação descrita por

$$r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho X^2 p_x(X) dX$$

em que ρ é um coeficiente de correlação.

Seja $\boldsymbol{u} = [x\ y]^T$ um vetor aleatório formado pelas 2 v.a.s, calcule o vetor média e a matriz covariância de $\boldsymbol{u}$.

Solução:

O vetor média e a matriz covariância de $\boldsymbol{u} = [x\ y]^T$ são dados por

$$\boldsymbol{m}_u = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{K}_u = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & k_{xy} \\ k_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & k_{xy} \\ k_{yx} & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Como as médias são iguais a zero tem-se

$$k_{xy} = k_{yx} = r_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho X^2 p_x(X) dX = \rho E[x^2] = \rho\sigma^2$$

e

$$\boldsymbol{K}_u = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Valor esperado e transformações lineares

- Em aplicações é útil determinar o vetor média e a matriz covariância de um vetor aleatório $\boldsymbol{y}$ definido por uma transformação linear dada por

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

em que a matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contém coeficientes constantes, o vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ é um vetor aleatório e o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n}$ é um vetor com coeficientes constantes.

- Nesse caso, o vetor média é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}_y &= E[\boldsymbol{y}] = E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}] \\ &= \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_x + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

- No caso da matriz covariância, tem-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_y &= E\left[\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m}_y\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{m}_y)^{\boldsymbol{T}}\right] \\
&= E[(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Am}_x-\boldsymbol{b}\ )(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Am}_x-\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{T}}] \\
&= E[(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Am}_x\ )(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{Am}_x)^{\boldsymbol{T}}] \\
&= E[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x\ )(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_x)^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}] \\
&= \boldsymbol{AK}_x\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}
\end{aligned}
$$

Descorrelacionamento de variáveis aleatórias

- Propriedade :

Dado um vetor aleatório $\boldsymbol{x}$ com matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ é possível fazer com que suas componentes fiquem descorrelacionadas duas a duas, através de uma transformação linear.

- Considere a transformação linear

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

em que $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz cujas colunas são os autovetores $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ da matriz $\boldsymbol{K}_x$ normalizados.

- Os autovetores $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ satisfazem às equações

$$\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \quad \text{e} \quad \boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{e}_i = 1, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

em que $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de $\boldsymbol{K}_x$

- Como a matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ é uma matriz simétrica, sabe-se de álgebra linear, que seus autovetores são ortogonais, ou seja,

$$\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{e}_j = 0, \qquad i, j = 1,2, \dots, n, \qquad i \neq j$$

- Por outro lado, a matriz covariância do vetor $\boldsymbol{y}$ é dada por

$$\boldsymbol{K}_y = E\left[\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m}_y\right)\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m}_y\right)^{\boldsymbol{T}}\right] = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}$$

- Em seguida, verifica-se que

$$\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}_x\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\Lambda}_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

o que considerando $\boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{e}_j = 0$ e $\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}$ permite escrever $k_{y_i y_j} = \begin{cases} \lambda_i, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ e mostra que as componentes de $\boldsymbol{y}$ são descorrelacionadas duas a duas.

Exemplo 10

Considere um vetor aleatório x com matriz covariância $\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{K}_x$

b) Calcule a matriz $\boldsymbol{P}$ da transformação linear $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ que pode descorrelacionar as variáveis aleatórias duas a duas e a matriz covariância $\boldsymbol{K}_y$

Solução:

a) Os autovalores de $\boldsymbol{K}_x$ devem satisfazer

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_x) = 0,$$

Que neste caso se reduz a

$\lambda^{2} - 4\lambda + 3 = 0$ → Raízes: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$

Tem-se então os autovetores $\boldsymbol{e}_1$ and $\boldsymbol{e}_2$ de $\boldsymbol{K}_x$ que satisfazem

$$\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1$$
$$\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2$$

Obtém-se então os autovetores normalizados

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad e \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

b) A matriz $\boldsymbol{P}$ da transformação linear que transforma o vetor aleatório $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{y}$ com componentes descorrelacionados é descrita por

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Verificando-se o efeito de $\boldsymbol{P}$, obtém-se

$$\boldsymbol{K}_y = \boldsymbol{P}\boldsymbol{K}_x\boldsymbol{P}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D. Valor esperado condicional

- O conceito de valor esperado pode ser estendido para situações em que a v.a. y é condicionada a um evento M.

- Neste caso, a fdp a ser usada deve ser a fdp condicional $p_{y|M}(Y)$.

- Desta forma, o valor esperado de y condicionado ao evento M é dado por

$$E[y|M] = \int_{-\infty}^{\infty} Y \, p_{y|M}(Y) \mathrm{dY}$$

- O Teorema Fundamental do Valor Esperado origina expressões para o valor esperado condicional de funções do tipo $y = g(x)$ de v.a.s

- No caso de uma função de v.a. real $y = g(x)$, tem-se

$$E[g(x)|M] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\, p_{x|M}(X) dX$$

- No caso de uma função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ de um vetor aleatório, obtém-se

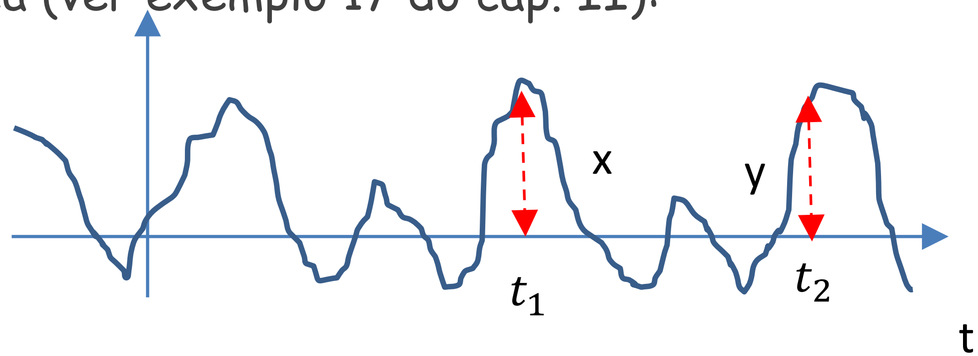
$$E[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|M] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})\, p_{\boldsymbol{x}|M}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

Observações

- O valor esperado condicional $E[g(x)|M]$ permite a definição dos conceitos
  - média condicional $m_{x|M}$,
  - variância condicional $\sigma_{x|M}^2$ e
  - valor médio quadrático $\lambda_x = E[x^2|M]$.
- Além disso, $E[g(x)|M]$ origina os conceitos de de correlação condicional $r_{xy|M}$ e covariância condicional $k_{xy|M}$.

Exemplo 11

Considere um sinal obtido em um circuito eletrônico com a seguinte característica (ver exemplo 17 do cap. II):



Os valores nos instantes de tempo t_1 e t_2 podem ser caracterizados por 2 v.a.s x e y conjuntamente Gaussianas, que resulta em

$$p_{xy}(X,Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{X^2-2\rho XY+Y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}}$$

Neste caso, a média e a variância da v.a. y são $m_y = 0$ e $\sigma_y^2 = \sigma^2$. Determine:

a) A média condicional $m_{y|M}$ com relação ao evento $M = \{x = X\}$.

b) A variância condicional $\sigma_{y|M}^2$ com relação ao evento $M = \{x = X\}$.

Solução:
Neste caso, tem-se

$$m_{y|M} = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_{y|x=X}(Y) dY$$

$$\sigma_{y|M}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (Y - m_{y|M})^2 p_{y|x=X}(Y) dY$$

Calculando-se $p_{y|x=X}(Y) = \frac{p_{xy}(X,Y)}{p_x(X)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(Y-\rho X)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}}$, obtém-se

a) $m_{y|M} = \int_{-\infty}^{\infty} Y p_{y|x=X}(Y) dY = \int_{-\infty}^{\infty} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(Y-\rho X)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} dY = \rho X$

b) $\sigma_{y|M}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (Y - m_{y|M})^2 p_{y|x=X}(Y) dY = \sigma_{y|M}^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (Y - m_{y|M})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(Y-\rho X)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} dY = \sigma^2(1-\rho^2)$$

Observações

- O valor esperado condicional permite a determinação de valores esperados que envolvem cálculos complexos de forma simples.

- No caso de uma função de 2 variáveis, é possível mostrar que $E[g(x,y)]$ pode ser obtido por

$$E[g(x,y)] = E[f(x)],$$

em que $f(x)$ é uma função definida por

$$f(X) = E[g(X,y)|x = X]$$

- Para demonstrar $E[g(x,y)]$ e $f(X)$ considera-se

$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)\, p_{y|x=X}(Y) dY\right]}_{f(X)} dX = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) f(X) dX$$

Exemplo 12

Considere o Exemplo 11 com $g(x, y) = xy$

Solução:

Usando $f(X) = E[g(X, y)|x = X]$ tem-se

$$f(X) = E[Xy|x = X] = XE[y|x = X] = X\rho X = \rho X^2$$

Considerando-se $m_{y|x=X}$, obtém-se

$$f(X) = \rho X^2$$

Isto significa que $f(x) = \rho x^2$ e obtém-se

$$r_{xy} = E[f(x)] = \rho E[x^2] = \rho\sigma^2$$

E. Desigualdades

- Em situações em que o cálculo de probabilidades é difícil ou muito trabalhoso, uma solução de compromisso consiste em obter limitantes superiores ou inferiores para as probabilidades, ou seja, desigualdades.

- As desigualdades aqui apresentadas decorrem da desigualdade fundamental descrita por

$$P(x \in I) \leq \frac{E[f(x)]}{a},$$

em que se requer que $f(x) \geq 0$ para todo x e $f(x) \geq a$ em que $a > 0$ para todo $x \in I$, $I \subset \mathcal{R}$.

- Para mostrar a desigualdade fundamental escreve-se

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(X)p_x(X)dX = \int_I f(X)p_x(X)dX + \int_{\bar{I}} f(X)p_x(X)dX$$

- Como por hipótese $f(x) \geq 0$, tem-se

$$E[f(x)] \geq \int_I f(X)p_x(X)dX$$

- E como $f(x) \geq a > 0$ para $x \in I$, obtém-se

$$E[f(x)] \geq a \int_I p_x(X)dX = aP(x \in I)$$

e

$$P(x \in I) \leq \frac{E[f(x)]}{a}$$

Exemplo 13

Considere uma v.a. x com média nula e variância σ^2. Com estes dados, deseja-se avaliar o valor de $P(x \geq b)$, em que b é uma constante positiva.

Solução:

Neste caso, define-se (de forma arbitrária)

$$f(x) = \left(x + \frac{\sigma^2}{b}\right)^2, b \geq 0$$

e toma-se $I = \{x \colon x \geq b\}$. Deste modo, a partir de $P(x \in I) \leq \frac{E[f(x)]}{a}$, tem-se

$$P(x \in I) \leq \frac{E\left[\left(x + \frac{\sigma^2}{b}\right)^2\right]}{a}$$

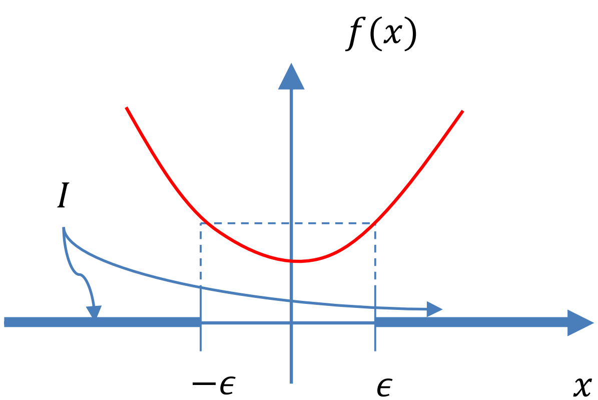
em que para satisfazer $f(x) \geq a > 0$ em I escolhe-se $a = \left(\frac{b^2+a^2}{b}\right)^2$ e tem-se

$$P(x \geq b) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + b^2}$$

Desigualdade de Tchebyshev

- A partir da desigualdade fundamental, é possível estabelecer algumas desigualdades notáveis.

- Considere uma função par qualquer $f(x)$, não negativa e crescente com $x > 0$, conforme ilustrado abaixo.



- Para este caso particular, tem-se a desigualdade de Tchebyshev generalizada:

$$P(x \in I) \leq \frac{E[f(x)]}{f(\epsilon)}$$

Desigualdade de Markov

- Formas particulares da função par $f(x)$ conduzem a outras desigualdades.

- Por exemplo, quando $f(x) = |x|^r$, obtém-se a desigualdade de Markov:

$$P(x \in I) \leq \frac{E[f(x)]}{f(\epsilon)} = \frac{|x|^r}{\epsilon^r}$$

- Finalmente, tomando-se $r = 2$ na desigualdade de Markov tem-se a desigualdade de Tchebyshev em sua forma usual:

$$P(x \in I) \leq \frac{|x|^2}{\epsilon^2}$$

Lei dos grande números

- Considere uma sequência de v.a.s independentes e identicamente distribuídas de média m e variância σ^2 dada por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- A sequência de v.a.s $\{x_n\}$ converge estocasticamente para um valor a se para um $\epsilon > 0$ tem-se

$$\lim_{n \to \infty} P(|x_n - a| < \epsilon) = 1$$

ou de forma equivalente

$$\lim_{n \to \infty} P(|x_n - a| \geq \epsilon) = 0, \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

- A lei (fraca) dos grandes números mostra que para um número suficientemente grande n, x_n converge para a com alta probabilidade.

- Propõe-se mostrar que a média empírica dada por

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

converge estocasticamente para o valor m, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - m| \geq \epsilon) = 0, \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

- Para isto, observando-se que

$$E[M_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[x_i]}_{m} = m$$

e

$$\sigma_{M_n}^2 = E[|M_n - m|^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[\sigma_{x_i}^2]}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

- Com os resultados anteriores, obtém-se a desigualdade de Tchebyshev

$$P(|M_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{E[|M_n - m|^2]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma_{M_n}^2}{\epsilon^2}$$

- Calculando-se o limite quando $n \to \infty$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} P(|M_n - m| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} E[|M_n - m|^2]/\epsilon^2$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 0,$$

- A lei (forte) dos grandes números difere ligeiramente e é dada por

$$P\left(\lim_{n\to\infty} M_n = m\right) = 1,$$

o que indica que a sequência M_n converge com probabilidade 1 para m.

Exemplo 14

Para estimar a probabilidade de um evento A, $P(A)$, calcula-se a frequência relativa do evento A que consiste em uma sequência de v.a.s de Bernoulii.

Qual deve ser o número de experimentos n para que se tenha uma probabilidade igual a $0{,}95$ de que a frequência relativa esteja dentro de uma tolerância $\epsilon = 0{,}01$ da probabilidade $P(A)$?

Solução:

A probabilidade associada à média m de uma sequência de v.a.s de Bernoulli é $p = 1/2$ enquanto que a variância é dada por $\sigma^2 = p(1-p) = 1/4$.

A probabilidade do evento A, $P(A)$, pode ser estimada por

$$P(|f(A) - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

ou

$$P(|f(A) - m| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} = 1 - \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

Para uma precisão de $\epsilon = 0{,}01$ tem-se

$$1 - P(|f(A) - m| < \epsilon) = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$1 - 0.95 = \frac{1}{4n\epsilon^2} = 0.05$ -> $n = 50000$ experimentos

F. Funções características

- Nesta seção, estuda-se o conceito de funções características que são uma ferramenta importante para cálculos com v.a.s.

- Em particular, as funções características são úteis na solução de problemas com múltiplas v.a.s.

- A função característica de uma v.a. real x é definida por

$$\begin{aligned} M_x(v) &= E\left[e^{jvx}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvX} p_x(X) dX \,, \end{aligned}$$

em que $M_x(v)$ é uma função da variável real v e toma valores no conjunto dos números complexos.

Cálculo de funções características

1) Função característica de uma v.a. uniforme

$$p_x(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$M_x(v) = E\left[e^{jvx}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvX} \frac{1}{b-a} dX = \frac{e^{jvX}}{jv(b-a)} \Bigg|_a^b$$

$$= \frac{1}{jv(b-a)} \left(e^{jvb} - e^{jva}\right)$$

2) Função característica de uma v.a. exponencial

$$p_x(X) = ae^{-aX}u(X), \qquad a > 0$$

$$\begin{aligned} M_x(v) &= E\left[e^{jvx}\right] \\ &= \int_0^\infty e^{jvX} a e^{-aX} dX = \frac{a}{jv-a} e^{-(a-jv)X} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{a}{a-jv} \end{aligned}$$

3) Função característica de uma v.a. de Poisson

$$p_x(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k e^{-a}}{k!} \delta(X-k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$M_x(v) = E\left[e^{jvx}\right]$$

$$= \int_0^{\infty} e^{jvX} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k e^{-a}}{k!} \delta(X-k)\, dX$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k e^{-a}}{k!} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{jvX} \delta(X-k) dX}_{e^{jv_k}} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{jv})^k}{k!}$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = e^u$ tem-se

$$M_x(v) = e^{-a} e^{ae^{jv}} = e^{-a(1-e^{jv})}$$

4) Função característica de uma v.a. Gaussiana

$$p_x(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

$$M_x(v) = E\left[e^{jvx}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvX} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}} dX$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}} e^{jvm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(X-(m+\sigma^2 jv)\right)^2}{2\sigma^2}} dX$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2 v^2}{2}} e^{jvm}$$

Funções características e a transformada de Fourier

- Para evitar manipulações algébricas trabalhosas com a função característica pode-se usar a transformada de Fourier para auxiliar os cálculos.

- Salvo uma mudança de variáveis, $M_x(v)$ coincide com a transformada de Fourier de $p_x(X)$ descrita por

$$\Im\{p_x(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) e^{-2\pi f X} dX \,,$$

- Logo, chega-se à relação

$$M_x(v) = \Im\{p_x(X)\}\Big|_{f = -\frac{v}{2\pi}}$$

- De forma análoga, conhecida $M_x(v)$, é possível obter a sua fdp $p_x(X)$ usando-se a transformada inversa de Fourier dada por

$$
\begin{aligned}
p_x(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Im\{p_x(X)\} e^{2\pi f X} df \\
&= \Im^{-1}\left\{ M_x(v) \Big|_{v=-2\pi f} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_x(v) e^{-jvX} dv,
\end{aligned}
$$

em que $\Im^{-1}\{\,\}$ caracteriza a transformada inversa de Fourier.

Pares de funções e transformadas

	Função	Transformada
1.	$e^{-ab}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
2.	$te^{-ab}u(t)$	$\frac{1}{(a+j2\pi f)^2}$
3.	$\|t\|$	$\frac{-2}{(j2\pi f)^2}$
4.	$\delta(t)$	1
5.	$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2\pi f}$
6.	$\cos(2\pi f_c + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta}\delta(f - f_c) + e^{j\theta}\delta(f - f_c)]$
7.	$\text{sinc}\,(2\omega t)$	$\frac{1}{2\omega}\text{ret}_{2\omega}(f)$
8.	$\text{ret}_T(t)$	$\text{Tsinc}\,(fT)$

Propriedades da transformada de Fourier

Operação	Função	Transformada
1. Linearidade	$ag(t) + bh(t)$	$aG(f) + bH(f)$
2. Translação no tempo	$\mathrm{g}(\mathrm{t} - t_0)$	$G(f)e^{-j2\pi f t_0}$
3. Escala	$g(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} G(\frac{f}{a})$
4. Conjugado	$g^*(t)$	$G^*(-f)$
5. Translação na frequência	$\mathrm{g}(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$G(f - f_0)$
6. Modulação	$\mathrm{g(t)cos}(2\pi f_c + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta}G(f - f_c) + e^{j\theta}G(f - f_c)]$
7. Convolução	$\mathrm{g(t)} * \mathrm{h(t)}$	$G(f)H(f)$
8. Multiplicação	$g(t)h(t)$	$G(f) * H(f)$

Propriedades

1) $M_x(0) = 1$ (resulta da definição)

2) $|M_x(v)| \leq 1$

Demonstração:

A 3ª propriedade do valor esperado ($|E[x]| \leq E[|x|]$) permite escrever

$$|E[e^{jvx}]| \leq E[|e^{jvx}|]$$

Usando o fato de que $|e^{jvx}| = 1$, tem-se

$$|M_x(v)| \leq 1$$

3) Se $y = ax + b$ então $M_y(v) = e^{jvb}\ M_x(av)$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
M_y(v) &= E[e^{jvy}] \\
&= E\left[e^{jv(ax+b)}\right] \\
&= e^{jvb}\ E\left[e^{jvax}\right] = e^{jvb} M_x(av)
\end{aligned}
$$

4) Se $\{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\}$ são v.a.s estatisticamente independentes e

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

então

$$M_y(v) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(v)$$

Demonstração:

$$M_y(v) = E[e^{jvy}] = E[\prod_{i=1}^{n} e^{jvx_i}]$$

Como as v.a.s $\{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\}$ são estatisticamente independentes usando-se $E[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \, E[x_i]$ tem-se

$$M_y(v) = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{jvx_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(v)$$

5) $E[x^k] = (-j)^k \frac{d^k}{dv^k} M_x(v) \Big|_{v=0}$

Demonstração: Derivando-se $M_x(v)$ k vezes com relação a v, obtém-se

$$\frac{d^k}{dv^k} M_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} (jX)^k e^{jvX} p_x(X) dX$$

Fazendo-se $v = 0$, chega-se a

$$\frac{d^k}{dv^k} M_x(v) \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (jX)^k p_x(X) dX$$
$$= E[(jx)^k] = j^k E[x^k]$$

Exemplo 15

Sejam x e y 2 v.a.s estatisticamente independentes, ambas com fdp uniforme no intervalo $(-1,1]$.

Determine a função característica e a fdp da v.a. $z = x + y$

Solução:

Observando-se que a partir da propriedade 4 tem-se

$$z = x + y \quad \text{e} \quad M_z(v) = M_x(v)M_y(v)$$

As expressões de $M_x(v)$ e $M_y(v)$ são obtidas por

$$M_x(v) = M_y(v) = \Im\left\{\frac{1}{2}\mathrm{ret}_2(X)\right\}\Big|_{f = -\frac{v}{2\pi}} = \mathrm{sinc}\left(\frac{v}{\pi}\right)$$

Logo, tem-se

$$M_z(v) = \left(\mathrm{sinc}\left(\frac{v}{\pi}\right)\right)^2$$

A fdp de $z = x + y$ é dada por

$$p_z(Z) = \Im^{-1}\left\{\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{v}{\pi}\right)\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{tri}_4(Z)$$

Exemplo 16

Considere x e y 2 v.a.s estatisticamente independentes, ambas com fdp de Poisson de parâmetro a.

Determine a função característica e a fdp da v.a. $z = x + y$

Solução:

Observando-se que a partir da propriedade 4 tem-se

$$z = x + y \quad \text{e} \quad M_z(v) = M_x(v)M_y(v)$$

As expressões de $M_x(v)$ e $M_y(v)$ são obtidas por

$$M_x(v) = M_y(v) = e^{-a(1-e^{jv})}$$

Logo, tem-se

$$M_z(v) = M_x(v)M_y(v) = \left(e^{-a(1-e^{jv})}\right)^2 = e^{-2a(1-e^{jv})}$$

A fdp de $z = x + y$ é dada por

$$p_z(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2a)^i e^{-2a}}{i!} \delta(X - i)$$

Exemplo 17

Considere uma v.a. x com fdp exponencial.

Determine $E[x]$, $E[x^2]$ e $E[x^3]$

Solução:

A função característica da v.a. x exponencial é dada por

$$M_x(v) = \frac{a}{a - jv}$$

Calculando-se as derivadas, obtém-se

$$\frac{d}{dv} M_x(v) = \frac{d}{dv} \frac{a}{a - jv} = \frac{ja}{(a - jv)^2}$$
$$\frac{d^2}{dv^2} M_x(v) = \frac{d^2}{dv^2} \frac{a}{a - jv} = \frac{-2a}{(a - jv)^3}$$
$$\frac{d^3}{dv^3} M_x(v) = \frac{d^3}{dv^3} \frac{a}{a - jv} = \frac{-6ja}{(a - jv)^4}$$

Usando-se $E[x^k] = (-j)^k \frac{d^k}{dv^k} M_x(v) \Big|_{v=0}$ para $k = 1,2,3$, obtém-se

$$E[x] = (-j)\frac{j}{a} = \frac{1}{a}$$

$$E[x^2] = (-j)^2 \frac{(-2)}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$

$$E[x^3] = (-j)^3 \frac{(-6j)}{a^3} = \frac{6}{a^3}$$

Teorema do limite central

- O teorema do limite central é um resultado fundamental que mostra que a soma de um número muito grande de v.a.s tende a uma v.a. Gaussiana.

- Seja y_n uma v.a. definida por

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \,,$$

em que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ são v.a.s estatisticamente independentes, identicamente distribuídas, todas com média m e variância σ^2.

- Então a v.a. z_n que caracteriza a soma normalizada descrita por

$$z_n = \frac{y_n - m_{y_n}}{\sigma_{y_n}}$$

é tal que

$$\lim_{n\to\infty} p_{z_n}(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

Demonstração:

Usando $E[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i\, E[x_i]$ para $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, obtém-se

$$m_{y_n} = n.m \;\; \text{e} \;\; \sigma^2{}_{y_n} = n.\sigma^2$$

Logo, a soma normalizada pode ser escrita como

$$z_n = \frac{y_n - m_{y_n}}{\sigma_{y_n}} = \frac{y_n - n.m}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} w_i\,,$$

em que $w_i = \frac{x_i - m}{\sigma}$.

Note que $m_{w_i} = 0,\; i = 1,2,\dots,n$ e $\sigma^2{}_{w_i} = 1,\; i = 1,2,\dots,n$

Como as v.a.s $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ são estatisticamente independentes, as v.a.s $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ também o são. Tem-se então

$$M_{z_n}(v) = E\left[e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} w_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[\, e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i}] = \left(E\left[e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i}\right]\right)^n$$

Por outro lado, a expansão em série

$$e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i\right)^k}{k!}$$

Permite escrever

$$E[e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i}] = 1 + \frac{jv}{\sqrt{n}} m_{w_i} - \frac{v^2}{2n}\sigma^2{}_{w_i} - j\frac{v^3}{6n^{\frac{3}{2}}} E[w_i{}^3] + \cdots$$

Considerando-se $m_{w_i} = 0$ e ${\sigma^2}_{w_i} = 1$, tem-se

$$E[e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i}] = 1 - \frac{v^2}{2n} - \frac{R_n}{n},$$

em que R_n caracteriza o resto da série a partir do termo de 3ª ordem e satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

A partir de $M_{z_n}(v)$ pode-se escrever

$$\ln M_{z_n}(v) = \mathrm{n} \ln E[e^{jv\frac{1}{\sqrt{n}}w_i}] = \mathrm{n} \ln\left(1 - \frac{v^2}{2n} - \frac{R_n}{n}\right)$$

Considerando-se a série dada por

$$\ln(1 - \mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x^k}{k}$$

Pode-se reescrever $\ln M_{z_n}(v)$ como

$$\ln M_{z_n}(v) = -\frac{v^2}{2} - R_n - \frac{\left(\frac{v^2}{2n} + \frac{R_n}{n}\right)^2}{2n} - \frac{\left(\frac{v^2}{2n} + \frac{R_n}{n}\right)^3}{3n^2} + \cdots$$

Logo, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_{Z_n}(v) = -\frac{v^2}{2}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$$

Finalmente, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(Z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M_{Z_n}(v)e^{-jvX}dX$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_{Z_n}(v)e^{\overline{j}vX}dX$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}}$$

Função característica de um vetor aleatório

- A função característica de um vetor aleatório x de dimensão n é definida por

$$M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = E\left[e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}}\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

- Observe que $M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})$ é uma função das n variáveis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que caracterizam o vetor $\boldsymbol{v}$ e toma valores no conjunto dos n. complexos.

- No caso de vetores aleatórios, a fdp conjunta do vetor $\boldsymbol{x}$ pode ser obtida a partir de sua função característica.

Propriedades

1) $M_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{0}) = 1$

2) $|M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})| \leq 1$

3) Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$

então $M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}} M_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}\right)$

- Demonstração:

$$M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = E\left[e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y}}\right] = E\left[e^{j\boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})}\right] = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}}E\left[e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}\right]$$

Como $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}\right)^T$ tem-se

$$M_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{v}) = e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}}M_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}\right)$$

4) Se as componentes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ do vetor aleatório $\boldsymbol{x}$ são estatisticamente independentes então

$$M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(v_i)$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) &= E\left[e^{j\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}}\right] = E\left[e^{j\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}\right] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{j v_i x_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{j v_i x_i}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(v_i)
\end{aligned}
$$

5) $E\left[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}\right] = (-j)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \frac{\partial^{\,k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial v_1^{k_1} \partial v_2^{k_2} \dots \partial v_n^{k_n}} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) \Big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}}$

Exemplo 18

Seja $\boldsymbol{x}$ um vetor aleatório com função característica dada por

$$M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = e^{-(2v_1^2+2v_2^2+v_1v_2)}$$

em que $\boldsymbol{v} = [v_1\ v_2]^T$

Deseja-se determinar o vetor médio $\boldsymbol{m}_x$ e a matriz covariância $\boldsymbol{K}_x$ do vetor aleatório $\boldsymbol{x}$.

Solução:

Usando-se a prop. $E\left[x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}\right] = (-j)^{k_1+k_2+\cdots+k_n} \frac{\partial^{\,k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial v_1^{k_1} \partial v_2^{k_2} \ldots \partial v_n^{k_n}} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) \Big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}}$ tem-se

$$E[x_1] = (-j)\ \frac{\partial}{\partial v_1} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}} = (-j)\ (-4v_1 - v_2) M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}} = 0$$

$$E[x_2] = (-j)\ \frac{\partial}{\partial v_2} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}} = (-j)\ (-4v_2 - v_1) M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\big|_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}} = 0$$

Logo, tem-se

$$\boldsymbol{m_x} = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A mesma prop. 5 permite escrever

$$k_{x_1x_2} = E[x_1x_2] = E[x_2x_1] = (-j)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial v_2} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}} =$$

$$= (-1)[(4v_1 + v_2)(4v_2 - v_1) - 1]M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}} = 1$$

Além disso, tem-se

$$E[x_1^2] = (-j)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}}$$

$$= (-1)[(4v_1 + v_2)^2 - 4]M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}} = 4$$

$$E[x_2^2] = (-j)^2 \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}}$$

$$= (-1)[(4v_2 + v_1)^2 - 4]M_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v})\Big|_{\boldsymbol{v}=\mathbf{0}} = 4$$

Como $\boldsymbol{m}_x = \mathbf{0}$ tem-se $E[x_1^2] = \sigma_{x_1}^2 = 4$, $E[x_2^2] = \sigma_{x_2}^2 = 4$ e

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & k_{x_1x_2} \\ k_{x_1x_2} & \sigma_{x_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$