Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

III. Funções de variáveis aleatórias

- Neste capítulo, examina-se a caracterização probabilística de funções de v.a.s .

- Essas funções são também v.a.s e têm associadas uma FDP e uma fdp.

- São analisados os seguintes casos:
  - Funções constantes
  - Funções biunívocas e diferenciáveis
  - Funções genéricas

A. Função de v.a. real

Uma v.a. x é uma função de conjunto que atribui um valor real $x(\omega)$ a cada ponto-amostra ω do espaço de amostras Ω de acordo com o mapeamento

$$\begin{aligned} x: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow x(\omega) \end{aligned}$$

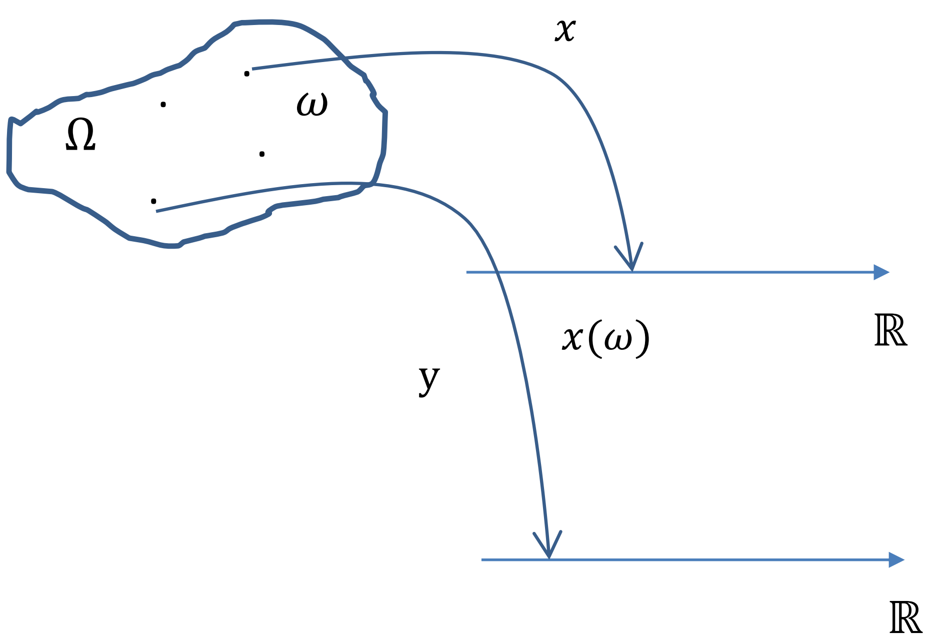
Considere uma função real g, definida sobre o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, de acordo com

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow x(\omega) \end{aligned}$$

O objetivo é analisar a função real composta $y = g(x)$ com domínio em Ω, associado ao mapa

$$\begin{aligned} y: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow g(x(\omega)) \end{aligned}$$

Isto significa que para todo $\omega \in \Omega$ tem-se um valor real $y(\omega) = g(x(\omega))$, conforme ilustrado por



$$y(\omega) = g(x(\omega))$$

Se a função de conjunto y obedecer às condições de uma v.a. ela também será uma v.a. Na prática, as funções $g(.)$ são tais que y é sempre uma v.a.

Neste caso, é de interesse determinar a fdp $p_y(Y)$ associada à v.a. y, em termos de g e $p_x(X)$. A determinação desta fdp é simples e considera

$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X,Y)dX = \int_{-\infty}^{\infty} p_{y|x=X}(Y)p_x(X)dX$$

Dado o valor da v.a. x, por exemplo $x = X$, a v.a. $y = g(X)$ é uma v.a. discreta que assume um único valor igual a $g(X)$.

Isto permite escrever

$$p_{y|x=X}(Y) = \delta(g(X) - Y),$$

que é válida para todo $\mathrm{X} \in \mathbb{R}$ e todo $\mathrm{Y} \in \mathbb{R}$

Para valores de Y tais que $Y \neq g(X)$ tem-se que esta fdp condicional é nula.

Desta forma, substituindo-se $p_{y|x=X}(Y)$ em $p_y(Y)$ obtém-se

$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(X) - Y) p_x(X) dX$$

A equação acima que fornece a fdp da v.a. y em função de g e $p_x(X)$ é geral e pode ser usada em qualquer situação envolvendo funções de v.a.s reais.

i. Funções constantes

Neste caso, considera-se que a função $g(x)$ assume um único valor G para qualquer valor de x em seu contradomínio, ou seja,

$$y = g(x) = G$$

Consequentemente, a fdp condicional $p_{y|x=X}(Y)$ é dada por

$$p_{y|x=X}(Y) = \delta(G - Y)$$

Logo, $p_y(Y)$ se reduz a

$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{y|x=X}(Y) p_x(X) dX$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(G - Y)\, p_x(X) dX = \delta(G - Y) \int_{-\infty}^{\infty} p_x(X) dX = \delta(G - Y)$$

ii. Funções biunívocas e diferenciáveis

Neste caso, considera-se que $g(x)$ é biunívoca e diferenciável. A integral

$$p_y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(X) - Y)p_x(X)dX$$

pode ser determinada fazendo-se a mudança de variáveis

$$Z = g(x)$$

Note que como $g(x)$ é biunívoca e diferenciável, tem-se

$$X = g^{-1}(z) = h(z)$$

Com $g^{-1}(.)$ representando a função inversa de $g(.)$ e

$$dX = |h'(z)|dZ$$

em que $h'(z) = \frac{dh(z)}{dZ}$

Com a mudança de variável $dX = |h'(z)|dZ$, a integral se escreve

$$p_y(Y) = \int_{C_g} \delta(g(X) - Y) p_x(X) |h'(z)| dZ$$

em que C_g é o contradomínio de $g(.)$.

Considerando-se a propriedade de funções impulso descrita por

$$\int_a^b \delta(Z - Y) f(Z) dZ = \begin{cases} f(Y), & Y \in [a, b] \\ 0, & Y \notin [a, b] \end{cases}$$

na expressão para $p_y(Y)$, obtém-se

$$p_y(Y) = \begin{cases} p_x(h(Y))|h'(Y)|, & Y \in C_g \\ 0, & Y \notin C_g \end{cases}$$

Observando-se que $h'(Y) = \frac{1}{g\prime(h(Y))}$ obtém-se

$$p_y(Y) = \begin{cases} \left.\dfrac{p_x(X)}{|g'(h(Y))|}\right|_{X = h(Y) = g^{-1}(Y)}, & Y \in C_g \\ 0, & Y \notin C_g \end{cases}$$

O resultado acima pode ser escrito de uma forma mais compacta usando-se a função indicadora de momento.

- Definição 1: função indicadora de momento

Seja $A \subset \Gamma$ um subconjunto de elementos α, em que $\alpha \in M$. A função indicadora $1_A(\alpha)$ do conjunto A é

$$1_A(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in A \\ 0, & \alpha \notin A \end{cases}$$

Considerando-se a definição de função indicadora de um conjunto, pode-se escrever

$$p_y(Y) = \frac{p_x(X)}{|g'(h(Y))|}\bigg|_{X = h(Y)} = g^{-1}(Y)\, 1_{C_g}(Y)$$

em que $1_{C_g}(Y)$ representa a função indicadora de C_g.

Exemplo 1

Considere uma v.a. Gaussiana x com parâmetros $m = 0$ e $\sigma = 1$. Seja y uma v.a. definida através da função descrita por

$$y = g(x) = 2x\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Calcule a fdp de y.

Solução:

Como a função $g(x)$ é biunívoca e diferenciável, a fdp de y pode ser determinada a partir da expressão

$$p_y(Y) = \frac{p_x(X)}{|g'(h(Y))|}\bigg|_{X = h(Y) = g^{-1}(Y)} 1_{C_g}(Y)$$

Para calcular a fdp de y precisamos determinar o contradomínio de $\mathrm{g}(\mathrm{x})$, que é dado por

$$C_g = \mathbb{R}$$

Além disso, precisamos da função inversa $g^{-1}(\mathrm{y})$ e da derivada de $\mathrm{g}(\mathrm{x})$em relação a X dadas por

$$Y = g(X) = 2X \;\; \Rightarrow g^{-1}(\mathrm{y}) = X = \frac{Y}{2} \, ,$$

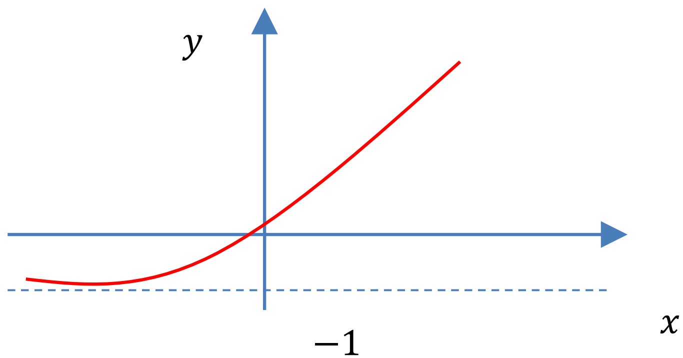
$$g'(X) = 2$$

Logo, tem-se

$$p_y(Y) = \left. \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}}{|2|} \right|_{X = \frac{Y}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{8}}, \qquad Y \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2

A característica tensão-corrente de um diodo é descrita por



em que x representa a tensão e y representa a corrente.

Analiticamente, a relação tensão-corrente é dada por

$$y = g(x) = \begin{cases} e^x - 1, & X < 0 \\ x, & X \geq 0 \end{cases}$$

Supondo-se que a tensão nos terminais do diodo seja caracteriza por uma v.a. Gaussiana de média zero e variância unitária, calcule a fdp de y.

Solução:

A função $g(x)$ é biunívoca e diferenciável, tendo como contradomínio o intervalo $C_g = (-1, \infty)$. A função inversa $g^{-1}(\mathrm{y})$ é dada por

$$g^{-1}(\mathrm{y}) = \begin{cases} \ln(y+1), & -1 < y \leq 0 \\ y, & 0 < y \end{cases}$$

Usando-se

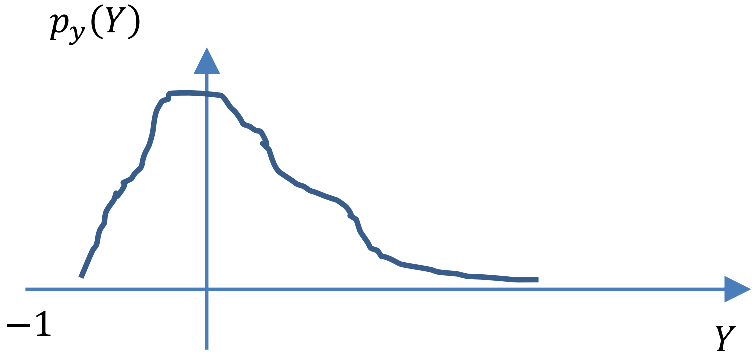
$$p_y(Y) = \frac{p_x(X)}{|g'(h(Y))|}\bigg|X \doteq h(Y) = g^{-1}(Y)\, 1_{C_g}(Y)$$

tem-se

$$p_y(Y) = \begin{cases} 0, & Y \leq -1 \\ \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}}{e^x}\bigg|X \doteq \ln(Y+1), & -1 < Y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}\big|X \doteq Y, & 0 < Y \end{cases}$$

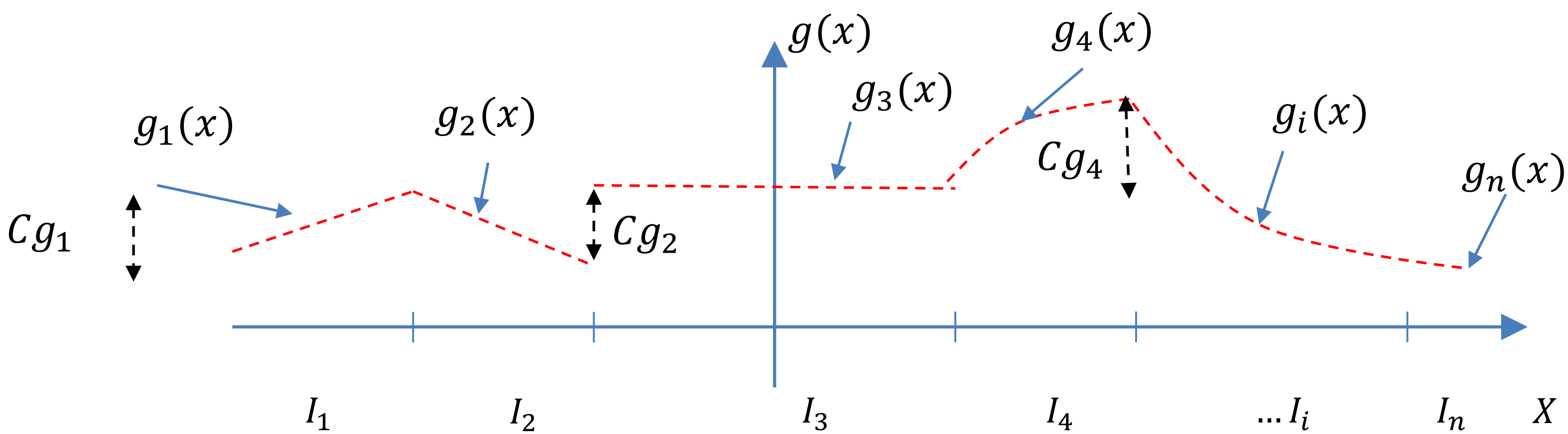
E finalmente, obtém-se

$$p_y(Y) = \begin{cases} 0, & Y \leq -1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(Y+1)} e^{-\frac{\ln(Y+1)^2}{2}}, & -1 < Y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} & 0 < Y \end{cases}$$



iii. Funções genéricas

- Nesta seção, é examinado o caso de funções genéricas, seccionalmente contínuas e diferenciáveis, como a ilustrada abaixo.



- O domínio de $g(x)$ é particionado em intervalos $I_1, I_2, \dots, I_n$, tais que em cada intervalo, $g(x)$ seja constante ou biunívoca e diferenciável.

- Assim, a função $g(x)$ é decomposta em n funções $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$, definidas nos intervalos $I_1, I_2, \dots, I_n$ e com contradomínios $Cg_1, Cg_2, \dots, Cg_n$

- A fdp da v.a. $y = g(x)$ é dado por $x(\omega) \to g(x(\omega))$ que, considerando-se a partição $I_1, I_2, \dots, I_n$ do domínio de $g(x)$ se escreve

$$
\begin{aligned}
p_y(Y) &= \int_{\mathcal{R}} \delta(g(X) - Y)\, p_x(X) dX \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{I_i} \delta(g_i(X) - Y)\, p_x(X) dX}_{A_i(Y)}
\end{aligned}
$$

- O termos do somatório que correspondem a funções $g_i(x)$ constantes (e iguais a G_i) dadas por $p_y(Y) = \delta(Y - G) = \delta(G - Y)$, o que resulta em

$$
\begin{aligned}
A_i(Y) &= \delta(Y - G_i) \int_{I_i} p_x(X) dX \\
&= \delta(Y - G_i) P(x \in I_i)
\end{aligned}
$$

- Por outro lado, os $A_i(Y)$ que correspondem a funções $g_i(x)$ biunívocas e diferenciáveis são dadas por

$$A_i(Y) = \frac{p_x(X)}{|g_i'(h(Y))|}\bigg|X = \dot{g_i}^{-1}(Y)\, 1_{C_{g_i}}(Y)$$

- Finalmente, levando-se em conta todos os termos obtém-se

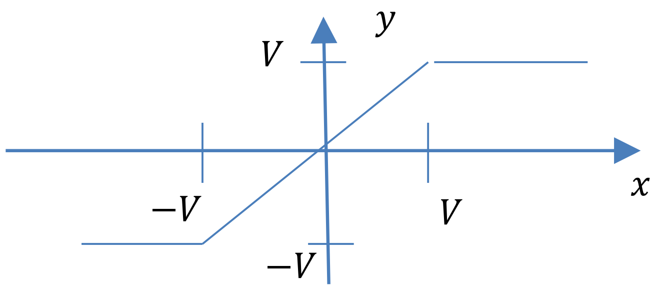
$$p_y(Y) = \sum_{i=1}^{n} A_i(Y)$$

$$= \sum\nolimits_{i \in \mathrm{C}} \delta(Y - G_i) P(x \in I_i) + \sum\nolimits_{i \in \mathrm{F}} \frac{p_x(X)}{|g_i'(h(Y))|}\bigg|X = \dot{g_i}^{-1}(Y)\, 1_{C_{g_i}}(Y)$$

em que o C é o conjunto de índices tais que $g_i(x)$ é constante em I_i e F é o conjunto dos índices tais que $g_i(x)$ é biunívoca e diferenciável em I_i.

Exemplo 3

Considere um limitador de tensão cuja característica é apresentada na figura abaixo em que x representa a tensão na entrada e y a tensão na saída.



Sendo a tensão de entrada x uma v.a. com fdp $p_x(X)$, deseja-se determinar a fdp da v.a. y na saída, ou seja, $p_y(Y)$.

Calcule $p_y(Y)$ para quando x é uma v.a. com fdp genérica $p_x(X)$, e para quando x é uma v.a. Gaussiana de média zero e variância unitária.

Solução:

Neste caso, uma partição de $\mathbb{R}$ conveniente seria

$I_1 = (-\infty, -V)$, $I_2 = [-V, V]$, e $I_3 = (V, \infty)$

As funções $g_1(x)$ e $g_3(x)$ associadas aos intervalos I_1 e I_3, respectivamente, são constantes e iguais a $-V$ e V, respectivamente.

A função $g_2(x)$ associada ao intervalo I_2 é biunívoca e diferenciável. O contradomínio de $g_2(x)$ é $C_{g_2} = [-V, V]$, a função inversa ${g_2}^{-1}(y) = Y$ e a derivada $g_2'(x) = 1$.

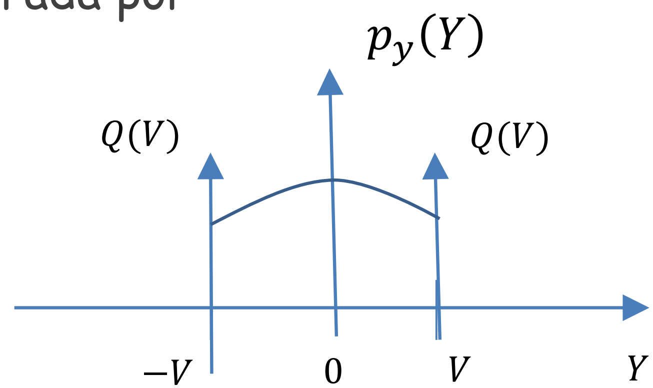
Logo, tem-se

$$p_y(Y) = \delta(Y + V)P(x \in I_1) + p_x(Y)1_{C_{g_2}}(Y) + \delta(Y - V)P(x \in I_3)$$

No caso em que x é uma v.a. Gaussiana, tem-se

$$p_y(Y) = \delta(Y+V\ )P(x \in I_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} 1_{C_{g_2}}(Y) + \delta(Y-V\ )P(x \in I_3)$$
$$= \delta(Y+V\ )Q(V) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} 1_{[-V,V]}(Y) + \delta(Y-V\ )Q(V)$$

A fdp acima é ilustrada por



Exemplo 4

Encontre a fdp $p_y(Y)$ da v.a. $y = ax^2$, em que $a > 0$ e x é uma v.a. dupla exponencial de parâmetro b, ou seja,

$$p_x(X) = \frac{b}{2} e^{-b|x|}$$

Solução:

Neste caso, uma partição de $\mathbb{R}$ conveniente seria

$I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = [0, \infty)$

As funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ associadas aos intervalos I_1 e I_2, respectivamente, são dadas por

$$g_1(x) = g_2(x) = ax^2$$

em que os contradomínios são $C_{g_1} = C_{g_2} = [0, \infty)$.

As funções $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são biunívocas e diferenciáveis em I_1 e I_2. Logo, suas derivadas são descritas por

$$g_1{}'(x) = g_2{}'(x) = 2ax$$

As funções inversas $g_1{}^{-1}(y)$ e $g_2{}^{-1}(y)$ são dadas por

$$g_1{}^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{Y}{a}}$$

$$g_2{}^{-1}(y) = +\sqrt{\frac{Y}{a}}$$

Usando-se

$$p_y(Y) = \sum\nolimits_{i \in C} \delta(Y - G_i) P(x \in I_i) + \sum\nolimits_{i \in F} \frac{p_x(X)}{|g_i'(h(Y))|}\bigg| X = \dot{g_i}^{-1}(Y)\, 1_{C_{g_i}}(Y)$$

obtém-se

$$p_y(Y) = \frac{p_x\left(-\sqrt{\frac{Y}{a}}\right)}{\left|-2\sqrt{aY}\right|} 1_{[0,\infty)}(Y) + \frac{p_x\left(\sqrt{\frac{Y}{a}}\right)}{\left|2\sqrt{aY}\right|} 1_{[0,\infty)}$$

$$= \frac{\frac{b}{2}\exp\left(-b\sqrt{\frac{Y}{a}}\right)}{4\sqrt{aY}} 1_{[0,\infty)} \quad (Y) + \frac{\frac{b}{2}\exp\left(-b\sqrt{\frac{Y}{a}}\right)}{4\sqrt{aY}} 1_{[0,\infty)}$$

Note que como $1_{[0,\infty)} = u(Y)$ equivale ao degrau unitário, tem-se

$$p_y(Y) = \frac{b \exp\left(-b\sqrt{\frac{Y}{a}}\right)}{2\sqrt{aY}} u(Y)$$

B. Funções de vetores aleatórios

- Esta seção examina funções de vetores aleatórios.

- Em particular, considera-se um vetor $\boldsymbol{x}$ composto por n v.a.s $x_1, x_2, \dots, x_n$ e a função de conjunto que atribui um vetor n-dimensional $\boldsymbol{x}(\omega)$ a cada ponto-amostra ω do espaço de amostras Ω, de acordo com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\longrightarrow \boldsymbol{x}(\omega) \end{aligned}$$

- Considere uma função vetorial m-dimensional $\boldsymbol{g}$, definida sobre o $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x}(\omega) &\longrightarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\omega)) \end{aligned}$$

- Note que a função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

- Deseja-se analisar a função vetorial m-dimensional composta $\mathbf{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ com domínio em Ω associada ao mapa

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \omega &\longrightarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(\omega)) \end{aligned}$$

- Note que se a função de conjunto $\mathbf{y}$ obedecer às condições de um vetor aleatório, ela será também um vetor aleatório.

- Na prática, tem-se sempre uma função m-dimensional $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{y}$ é um vetor aleatório.

- Como o vetor aleatório $\mathbf{y}$ é função do vetor aleatório $\mathbf{x}$, escreve-se

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} g_1(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1,\ x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

- Neste caso, é de interesse determinar a fdp conjunta $p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y})$, associada a $\mathbf{y}$, em termos de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ e $p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X})$.

- A determinação desta fdp é obtida por

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{xy}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) d\boldsymbol{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y}) p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

em que considera-se n integrais.

- Dado o vetor aleatório $\boldsymbol{x}$, por exemplo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}$, o vetor aleatório $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é um vetor aleatório discreto que assume um único valor igual a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$.

- Logo, pode-se escrever

$$p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y}) = \delta(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y})$$

- Substituindo-se $p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y})$ na expressão para $p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y})$, obtém-se

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y}) p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y})\, p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X} \end{aligned}$$

- A equação acima é geral e pode ser usada em qualquer situação envolvendo funções m-dimensionais de n v.a.s reais.

i. Funções Constantes

- Neste caso, considera-se que a função $g(x)$ assume um único vetor de valores G para qualquer x em seu contradomínio, ou seja,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{G}$$

- Consequentemente, a fdp conjunta $p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y})$ é dada por

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \delta(\mathbf{G} - \boldsymbol{Y}) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$
$$= \delta(\mathbf{G} - \boldsymbol{Y})$$

ii. Funções Biunívocas e Diferenciáveis

- No caso de funções $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ biunívocas, o que implica em $m = n$, e diferenciáveis em cada argumento, tem-se que a fdp conjunta $p_y(\boldsymbol{Y})$ pode ser determinada fazendo-se a mudança de variáveis

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$$

- Observe que, como $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é biunívoca e diferenciável em cada argumento, tem-se

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Z}) = \mathbf{h}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} h_1(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ \vdots \\ h_m(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix}$$

- Com $g^{-1}(.)$ representando a função inversa de $g(x)$ obtida resolvendo-se o sistema de equações $\mathbf{y} = g(x)$ para x e

$$dX = |\,J_h(Z)|dZ$$

em que $J_h(Z)$ é o Jacobiano da transformação $\mathbf{h}(Z)$ definido por

$$J_h(Z) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z_1} & \frac{\partial h_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial z_1} & \frac{\partial h_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

- Com esta mudança de variável, a fdp conjunta $p_y(\boldsymbol{Y})$ se escreve

$$p_y(\boldsymbol{Y}) = \int\int \dots \int_{C_g} \delta(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}) p_x\big(\mathbf{h}(\mathbf{Z})\big) | \boldsymbol{J_h}(\boldsymbol{z}) | \boldsymbol{dZ}$$

em que C_g é o contradomínio da função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. Considerando-se a propriedade de funções impulso, segundo a qual, para $\boldsymbol{Z}$ n-dimensional tem-se

$$\int\int \dots \int_{D} \delta(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{Y}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \boldsymbol{dZ} = \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}), & \boldsymbol{Y} \in D \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{Y} \notin D \end{cases}$$

- Desta forma, obtém-se

$$p_y(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} p_x\big(\mathbf{h}(\boldsymbol{Y})\big) | \boldsymbol{J_h}(\boldsymbol{Y}) |, & \boldsymbol{Y} \in C_g \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{Y} \notin C_g \end{cases}$$

- Observando-se ainda que $\boldsymbol{J_h}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y}))}$ obtém-se finalmente

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} \dfrac{p_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{X})}{|\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{X})|} \Big\lfloor \boldsymbol{X} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Y}), & \boldsymbol{Y} \in C_g \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{Y} \notin C_g \end{cases}$$

ou ainda

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{X})}{|\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{X})|} \Big\lfloor \boldsymbol{X} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{Y})\, \mathbf{1}_{C_g}(\boldsymbol{Y}),$$

em que $\mathbf{1}_{C_g}(\boldsymbol{Y})$ é a função indicadora de C_g e $\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{X})$ é o Jacobiano de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ dado por

$$\boldsymbol{J_g}(\boldsymbol{X}) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial X_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

iii. Funções genéricas

- Neste caso, o domínio de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é particionado em regiões $R_1, R_2, \dots, R_n$, tais que em cada uma delas, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ seja constante ou biunívoca e diferenciável.

- Logo, a função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é decomposta em n funções $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{x})$, definidas nas regiões $R_1, R_2, \dots, R_n$ e com contradomínios $Cg_1, Cg_2, \dots, Cg_n$.

- A fdp conjunta de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, considerando-se a partição nas regiões $R_1, R_2, \dots, R_n$ do domínio de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ é descrita por

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y})\, p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int \dots \int_{R_i} \delta(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{Y})\, p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}}_{A_i(\boldsymbol{Y})}$$

- Os termos $A_i(\boldsymbol{Y})$ que correspondem às funções $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X})$ constantes (e iguais a $\boldsymbol{G}_i$) são descritos por

$$A_i(\boldsymbol{Y}) = \delta(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}_i) \int \dots \int_{R_i} p_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$
$$= \delta(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}_i) P(\boldsymbol{x} \in R_i)$$

- Os termos $A_i(\boldsymbol{Y})$ que correspondem às funções $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X})$ biunívocas e diferenciáveis são dados por

$$A_i(\boldsymbol{Y}) = \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{X})}{\left|\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{g_i}}(\boldsymbol{X})\right|} \Big\lfloor \boldsymbol{X} = \boldsymbol{g_i}^{-1}(\boldsymbol{Y})\, \mathbf{1}_{C_{g_i}}(\boldsymbol{Y}),$$

em que $\mathbf{1}_{C_{g_i}}(\boldsymbol{Y})$ é a função indicadora de C_{g_i} e $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{g_i}}(\boldsymbol{X})$ é o Jacobiano de $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{X})$ dado por

$$\boldsymbol{J}_{g_i}(\boldsymbol{X}) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{i1}}{\partial X_1} & \frac{\partial g_{i1}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_{i1}}{\partial X_n} \\ \frac{\partial g_{i2}}{\partial X_1} & \frac{\partial g_{i2}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_{i2}}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{in}}{\partial X_1} & \frac{\partial g_{in}}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial g_{in}}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

- Finalmente, levando-se em conta todos os termos obtém-se

$$p_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{Y}) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\boldsymbol{Y})$$

$$= \sum_{i\in \mathrm{C}} \delta(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}_i) P(\boldsymbol{x} \in R_i) \ + \sum_{i\in \mathrm{F}} \frac{p_{\boldsymbol{x}}(\mathbf{X})}{\left|J_{\boldsymbol{g_i}}(\boldsymbol{X})\right|} \Big\lfloor \boldsymbol{X} = \boldsymbol{g_i}^{-1}(\boldsymbol{Y})\, \mathbf{1}_{C_{g_i}}(\boldsymbol{Y}),$$

em que o C é o conjunto de índices tais que $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ é constante em R_ie F é o conjunto dos índices tais que $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$ é biunívoca e diferenciável em R_i.

Exemplo 5

Considere 2 v.a.s x e y que possuem uma fdp conjunta dada por

$$p_{xy}(X, Y)$$

Determine a fdp conjunta de $z = x + y$ e a fdp marginal de z.

Solução:

Considere $z = x + y$ e $\mathrm{w} = x$ e os mapeamentos inversos a partir de

$Z = X + Y$ -> $Y = Z - W$

$W = X$ -> $X = W$

o que indica os mapeamentos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$

O Jacobiano é dado por $J_{xy} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial X} & \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial X} & \frac{\partial W}{\partial Y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$

$$p_{zw}(Z, W) = \left. \frac{p_{xy}(X, Y)}{|J_{xy}|} \right|_{X=W,\, Y=Z-W} = p_{xy}(W, Z - W)$$

$$\begin{aligned} p_z(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{zw}(Z, W) dW \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(X, Z - W) dX \end{aligned}$$