Modelos Probabilísticos em Engenharia Elétrica

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, PUC-Rio
delamare@cetuc.puc-rio.br

Material e avaliação

- Notas de aula

- Livro texto:
  - Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos, J.P. Albuquerque, J. M. Fortes e W. Finamore.

- Avaliação:
  - 3 Provas.
  - 6 Listas de exercícios.
  - Critério 5 da PUC-Rio
  - Listas valem 25% de G1, G2 e G3

Conteúdo

I. Modelos Probabilísticos

A. Espaço de amostras

B. Álgebra de eventos

C. Medida de probabilidade

D. Sistema de probabilidade

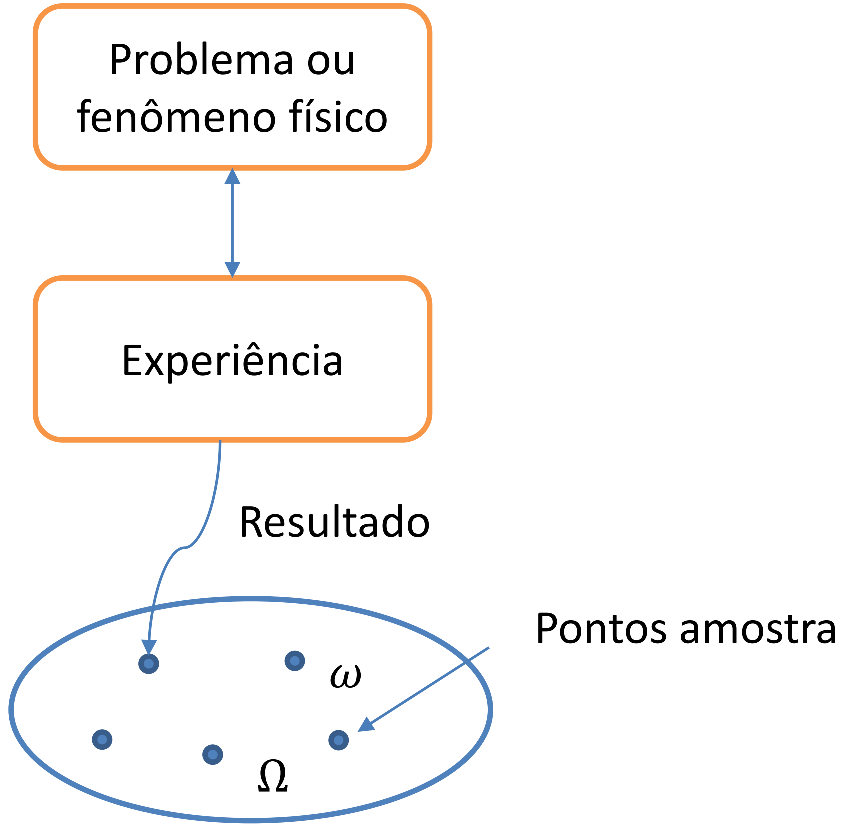
- Este capítulo revisa a teoria da probabilidade e introduz um modelo matemático.

- O modelo matemático considera de forma abstrata um fenômeno físico ao qual está associado uma incerteza.

- O modelo matemático é composto de três elementos:

  i) Espaço de amostras Ω
  ii) Álgebra de eventos
  iii) Medidas de probabilidade

- Estes elementos se relacionam de acordo com a seguinte figura.



A. Espaço de amostras

- De acordo com o modelo probabilístico, para um dado fenômeno físico é definida uma experiência associada assim como o seu resultado.

- Pode-se então identificar sem ambiguidade todos os possíveis resultados da experiência.

- Supõe-se que a experiência pode ser repetida em condições idênticas um número qualquer de vezes e que em cada vez ocorrerá sempre um dos possíveis resultados identificados anteriormente.

- O modelo matemático utilizado associa a cada possível resultado da experiência um ponto ω chamado ponto-amostra.

- O conjunto de todos os pontos amostra ω é representado por Ω e denominado espaço de amostras.

Exemplo 1

Considere o arremesso de 1 dado como uma experiência e os seguintes resultados.

i) Escreva o número de pontos da face do dado virada para cima.

ii) Escreva o número de pontos da face do dado virada para cima par ou ímpar.

$$\Omega = \{\text{par}, \text{ímpar}\}$$

Solução:

i) O espaço de amostras correspondente é

$$\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ii) O espaço de amostras para esta experiência é dado por

$$\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Exemplo 2

Considere uma experiência que consiste em abrir qualquer livro com mais de 50 páginas e observar a primeira letra impressa na página de número 30.

A letra observada é o resultado da experiência.

Se o livro é escrito em português e não se faz distinção entre maiúsculas e minúsculas, o espaço de amostras resultante seria

$$\Omega = \{a, b, c, \dots, z\}$$

Neste caso, a representação numérica não surge naturalmente ainda que seja possível.

- Para um determinado fenômeno diferentes espaços de amostras poderão surgir de acordo com a definição do resultado da experiência.

- O emprego de um modelo elimina a possibilidade de ambiguidade uma vez que definida a experiência e os resultados associados, o espaço de amostras Ω fica perfeitamente caracterizado.

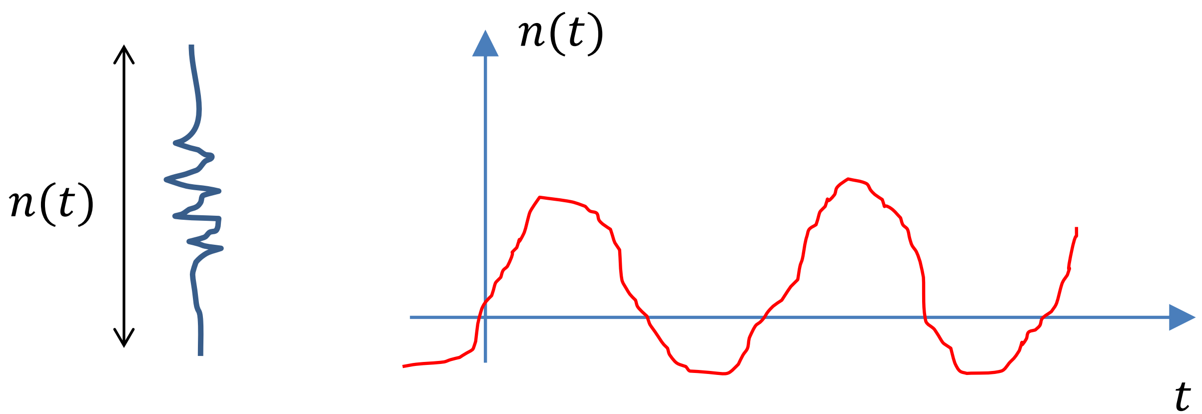
- No caso do exemplo 2, se o resultado de interesse fosse a ocorrência de vogal ou consoante, seria possível definir uma nova experiência.

- O espaço de amostras neste caso seria

$$\Omega = \{\text{vogal}, \text{consoante}\}$$

Exemplo 3

Considere um sinal $n(t)$ nos terminais de um resistor da seguinte figura.



A experiência consiste em medir o sinal em um dado instante t_0 e o valor $n(t_0)$ desta medida é tomado como resultado da experiência. O sinal $n(t_0)$ pode assumir qualquer valor real.

a) Defina o espaço de amostras

b) Supondo-se que o medidor só é capaz de medir valores entre $-V$ e V, determine o espaço de amostras e caracterize o conjunto de pontos-amostra.

Solução:

a) $\Omega = (-\infty, \infty)$

b) $\Omega = [-V, V]$

Desprezando-se a resolução finita do medidor, Ω é um conjunto não numerável ou infinito de pontos.

B. Álgebra de eventos

- No modelo matemático da teoria da probabilidade o espaço de amostras é simplesmente um conjunto de pontos.

- Em certos problemas, o interesse se concentra em um conjunto de pontos-amostra, ou seja, um subconjunto de Ω.

- A questão central da álgebra de eventos reside na manipulação de conjuntos de pontos-amostra (ou subconjuntos de Ω).

- Em seguida, são revistas algumas definições e propriedades da teoria de conjuntos.

- Definição 1: Igualdade

Dois conjuntos A e B são iguais e escreve-se

$$A = B,$$

Se todo elemento (ponto-amostra) de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A.

- Definição 2: Inclusão

Um conjunto A está incluído ou contido em um conjunto B e se escreve

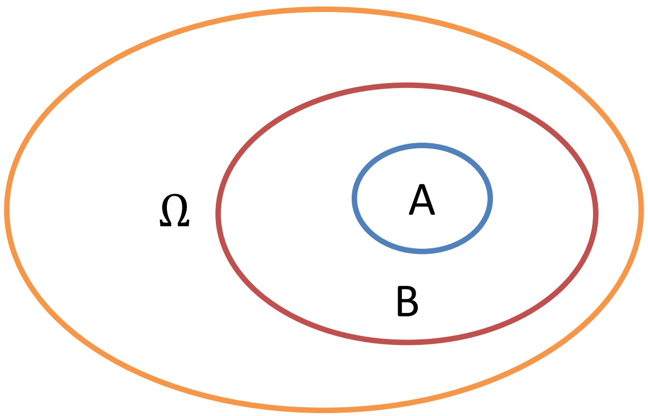
$$A \subset B$$

Se todo elemento de A é elemento de B.

Equivalentemente, diz-se que neste caso B contém A, escrevendo-se

$$B \supset A$$

As condições equivalentes a $A \subset B$ e $B \supset A$ são representadas graficamente na figura abaixo em que é mostrado um diagrama de Venn.



$A \subset B$

- Definição 3: União

O conjunto cujos elementos são elementos de um conjunto A, de um conjunto B ou de ambos é denominado união dos conjuntos A e B, escrevendo-se

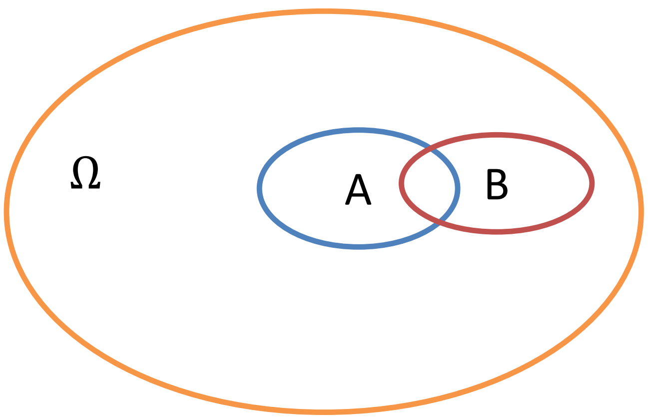
$$A \; U \; B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \text{ ou ambos}\}$$

- Definição 4: Interseção

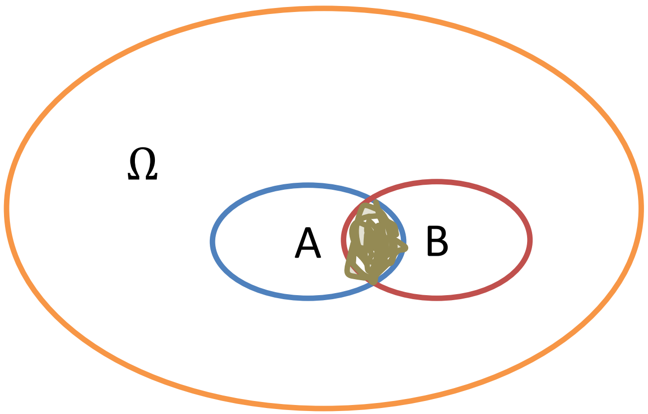
O conjunto cujos elementos são elementos de um um conjunto A e de um conjunto B é denominado interseção dos conjuntos A e B, escrevendo-se

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$$

- Nas figuras abaixo são representados os diagramas de Venn correspondentes à união e à interseção de dois conjuntos A e B.



$A \cup B$



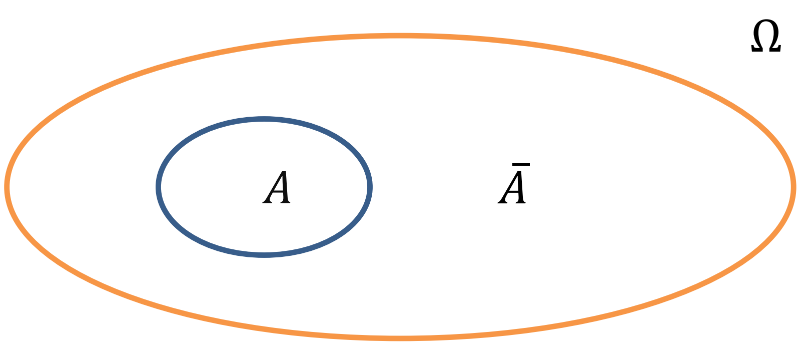
$A \cap B$

- Definição 5: Complemento

O conjunto cujos elementos são os elementos de Ω que não pertencem a um determinado conjunto A é chamado de complemento de A, sendo representado por $\bar{A}$, ou seja,

$$\bar{A} \triangleq \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A\},$$

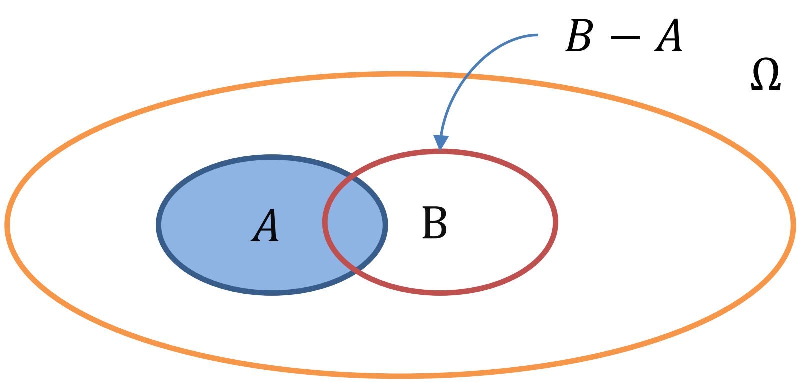
em que na definição precisa-se do conhecimento de Ω.



- Definição 6: Diferença

O conjunto cujos elementos são os elementos de um conjunto B que não pertencem a um outro conjunto A é chamado conjunto diferença entre B e A, e escreve-se

$$B - A \triangleq \{\omega \in \Omega : \omega \in B \ e \ \omega \notin A\}$$



- Definição 7: Conjunto vazio

O conjunto que não contém elementos é denominado conjunto vazio, sendo representado por

$$\emptyset$$

Definição 8: Conjuntos disjuntos

Dois conjuntos A e B que não têm elementos em comum são chamados disjuntos.

- Definição 9: Classe

Classe é o nome dado a uma coleção de conjuntos.

- No modelo matemático da teoria da probabilidade, é necessário que a classe contendo os subconjuntos de interesse satisfaça algumas propriedades.

- Essas propriedades garantem a condição de álgebra que possibilita uma definição consistente para a medida de probabilidade.

Propriedades

i) Associatividade

As operações de união e interseção são associativas, ou seja,

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

e

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ii) Distributividade

A operação de interseção é distributiva em relação à operação de união, ou seja,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Definição 10: Álgebra

Uma determinada classe ou coleção $\mathcal{A}$ é chamada álgebra quando satisfaz às seguintes condições:

i) $A \in \mathcal{A} \ \rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \ \rightarrow (A \cup B) \in \mathcal{A}$

Diz-se que a classe $\mathcal{A}$ é fechada quanto às operações de complementação e união.

Propriedades

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra então as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \rightarrow (B - A) \in \mathcal{A}$

iii) $\emptyset \in \mathcal{A}$

iv) $\Omega \in \mathcal{A}$

v) $A_i \in \mathcal{A}; i = 1,2, \dots, n \rightarrow \cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Quando em uma álgebra v) é válida mesmo para um número infinito de conjuntos, ou seja,

$$A_i \in \mathcal{A}; i = 1,2, \dots, \infty \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

a álgebra é dita uma σ −álgebra.

- Definição 11: σ −álgebra gerada por uma classe $\mathcal{C}$

A menor σ −álgebra que contém todos os conjuntos de uma classe $\mathcal{C}$ é representada por $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ e é denominada σ −álgebra gerada por $\mathcal{C}$.

Exemplo 4

Considere a experiência de um lançamento de dado cujo resultado é o número de pontos da face observada.

Designando-se o ponto-amostra associado à observação da face $i, (i = 1,2, \dots, 6)$ por f_i , tem-se o seguinte espaço de amostras:

$$\Omega = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

Considere agora a classe $\mathcal{C}$ abaixo:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_1\}\}$$

a) Verifique se a classe $\mathcal{C}$ constitui uma $\sigma -$ álgebra.
b) Modifique a classe $\mathcal{C}$ para que ela se torne uma $\sigma -$álgebra.

Solução:

a) A classe $\mathcal{C} = \left\{\emptyset, \Omega, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_1\}\right\}$ não constitui uma $\sigma -$ álgebra pois viola a definição.

Note que a união $\{f_1\} \cup \{f_2, f_4, f_6\} = \{f_1, f_2, f_4, f_6\}$ não está em $\mathcal{C}$.

b) Para tornar $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_1\}\}$ uma σ −álgebra precisamos dos seguintes elementos:

- A união $\{f_1\} \cup \{f_2, f_4, f_6\} = \{f_1, f_2, f_4, f_6\}$ deveria pertencer à classe.
- O elemento $\{f_1\}$ e seu complemento $\{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ deveriam pertencer à classe.
- O conjunto $\{f_3, f_5\}$ e seu complemento $\{f_1, f_2, f_4, f_6\}$

Desta forma, a classe modificada seria

$$\mathcal{C}' = \{\emptyset, \Omega, \{f_1, f_3, f_5\}, \{f_2, f_4, f_6\}, \{f_1\}, \{f_1, f_2, f_4, f_6\}, \{f_3, f_5\}, \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}\}$$

que é fechada em relação à complementação e à união, sendo uma álgebra.

Esta coleção é a menor σ −álgebra definida por $\mathcal{C}'$.

Observações

- É importante notar que se uma coleção contém um número finito de elementos e é álgebra, ela será trivialmente uma $\sigma -$álgebra.

- A $\sigma -$álgebra constitui o segundo elemento do modelo matemático da teoria da probabilidade que motiva as definições de evento e de eventos mutuamente exclusivos.

- Definição 12: Evento

Evento é qualquer subconjunto de Ω que pertence à $\sigma-$álgebra.

- Definição 13: Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos são ditos mutuamente exclusivos quando eles correspondem a dois subconjuntos de Ω que são disjuntos.

Exemplo 5

Considere uma rede de comunicações com 4 dispositivos em funcionamento (a, b, c, d), 5 enlaces $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, 3 posições da chave (I, II, III) sabendo-se que os enlaces podem estar em operação ou fora de operação. Uma experiência é definida ao observar os estados da rede.

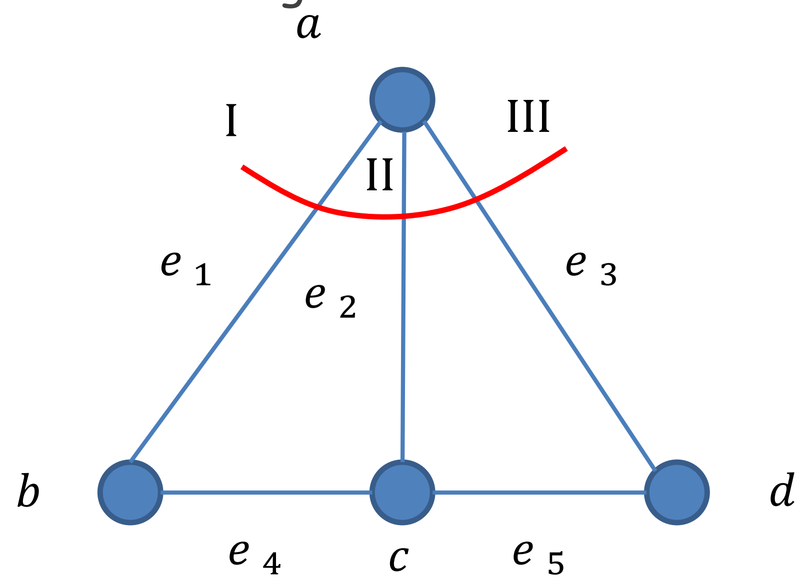
a) Encontre uma representação simples e compacta para os estados da rede e o número de pontos-amostra.

b) Determine o número de pontos-amostra dos seguintes eventos:

$A = \{\omega \in \Omega \colon a\ e\ c \text{ podem se comunicar}\}$

$\mathrm{B} = \{\omega \in \Omega \colon b\ e\ c \text{ podem se comunicar}\}$

$\mathrm{C} = \{\omega \in \Omega \colon \text{a chave está na posição } I\}$



Solução:

a) Um ponto-amostra ω_i do espaço de amostras pode ser representado como

$$\omega_i = (C_s, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5),$$

em que $C_s \in \{I, II, III\}$ e $e_i \in \{0,1\}$ para $i = 1,2, \dots, 5$.

O valor de C_s indicará a posição da chave enquanto que e_i indicará se o enlace está em operação ou fora de operação.

O número de pontos-amostra é dado pela combinação de possíveis estados das variáveis: $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$

b) O evento $A = \{\omega \in \Omega: a\ e\ c \text{ podem se comunicar}\}$ pode ser expresso como

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$

em que

$A_1 = \{I, 1, X, X, 1, X\} \rightarrow 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$ pontos-amostra

$A_2 = \{II, X, 1, X, X, X\} \rightarrow 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ pontos–amostra

$A_3 = \{III, X, X, 1, X, 1\} \rightarrow 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 8$ pontos–amostra

em que X indica que o enlace pode estar em operação ou não.

Somando-se os pontos-amostra tem-se que o evento A tem 32 pontos-amostra.

O evento $\mathrm{B} = \{\omega \in \Omega \text{: } b \ e \ c \text{ podem se comunicar}\}$ pode ser modelado como

$$\mathrm{B} = \{X, X, X, X, 1, X\} \rightarrow 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 48 \text{ pontos-amostra}$$

O evento $\mathrm{C} = \{\omega \in \Omega \text{: a chave está na posíção } I\}$ pode ser modelado como

$$\mathrm{C} = \{I, X, X, X, X, X\} \rightarrow 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \text{ pontos-amostra}$$

C. Medida de probabilidade

- A medida de probabilidade é um elemento do modelo probabilístico, que junto com o espaço de amostras Ω e a álgebra $\mathcal{A}$ consegue descrever o comportamento de um fenômeno.

Probabilidade como frequência relativa:

A frequência relativa é definida por

$$f_r = \frac{n(A)}{N},$$

em que $n(A)$ corresponde ao número de vezes em que um evento A ocorreu a partir de N observações de um fenômeno em uma experiência.

Propriedades

i) $0 \leq \frac{n(A)}{N} \leq 1$ uma vez que $0 \leq n(A) \leq N$.

ii) $n(\Omega) = N \rightarrow \frac{n(\Omega)}{N} = 1 = f_r$

iii) Para 2 eventos A e B mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$) examinados $n(A \cup B)$ em que $A \cup B$ ocorre em N observações, tem-se

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$
$$\frac{n(A \cup B)}{N} = \frac{n(A)}{N} + \frac{n(B)}{N}$$

Logo, a frequência relativa da união de A e B é igual à soma das frequências relativas.

Exemplo 6

Considere um sistema de comunicações com 20 enlaces instalados entre as empresas A e B.

A experiência consiste em observar o valor n_p de enlaces ocupados. O evento é definido por

$$M = \{\omega \in \Omega : n_p < 20\}$$

Supondo que a experiência tenha sido repetida 1000 vezes e que em 990 vezes observou-se que o número de enlaces ocupados era menor do que 20, calcule a frequência relativa do evento M.

Solução:

Neste caso, tem-se $\mathrm{n}(M) = 990$ e a frequência relativa é dada por

$$f_r = \frac{n(M)}{N} = \frac{990}{1000} = 0{,}99$$

Definição axiométrica de probabilidade:

A probabilidade associada a um evento é dada por

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{n(A)}{N}$$

A medida de probabilidade P é uma função real definida em $\mathcal{A}$ em que cada evento $A \in \mathcal{A}$ possui uma frequência $f_r = \frac{n(A)}{N}$.

Observação: um axioma é uma afirmação ou postulado suposto correto que é usado para desenvolvimento matemático ou lógico.

Axiomas:

i) $P(A) \geq 0$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) Se $A \cap B = \emptyset$ então

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Se $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i, j = 1,2, \dots, (i \neq j)$ então

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,

em que o domínio de P é a σ-algebra $\mathcal{A}$ e o contradomínio de P é o conjunto dos reais $[0, 1]$.

- A medida de probabilidade P é uma mapa de A em $\mathbb{R}$ que associa a cada elemento $A \in \mathcal{A}$ o número real $P(A)$:

$$\begin{aligned} P:\ \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ A &\to P(A) \end{aligned}$$

- Com estas definições e N suficientemente grande pode-se empregar

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N}$$

Propriedades da Medida de Probabilidade:

i) Aditividade

Para uma coleção de n eventos disjuntos $\{A_i, i = 1,2, \ldots, n\}$ satisfazendo

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad i, j = 1,2, \ldots, n \ (i \neq j)$$

resulta que $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

ii) Probabilidade do complemento

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

iii) Probabilidade do evento vazio

$$P(\emptyset) = 0$$

iv) Limitante superior para $P(A)$

$$P(A) \leq 1$$

v) Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

iv) Probabilidade condicional:

Definição 14: Probabilidade condicional

Dados 2 eventos A e B com $P(A) > 0$, chama-se probabilidade condicional de B dado A e se escreve

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Considere os eventos A e B dados por

$$A = \{\omega \in \Omega : n_p \leq 10\}$$
$$B = \{\omega \in \Omega : n_p = 5\}$$

- Suponha que a experiência tenha sido repetida N vezes e calcula-se a frequência relativa condicional, caracterizada como a frequência de B dado A.

- Entre as N repetições da experiência destacam-se as $\mathrm{n}(A)$ vezes em que A ocorre, determinando-se $\mathrm{n}(A \cap B)$.

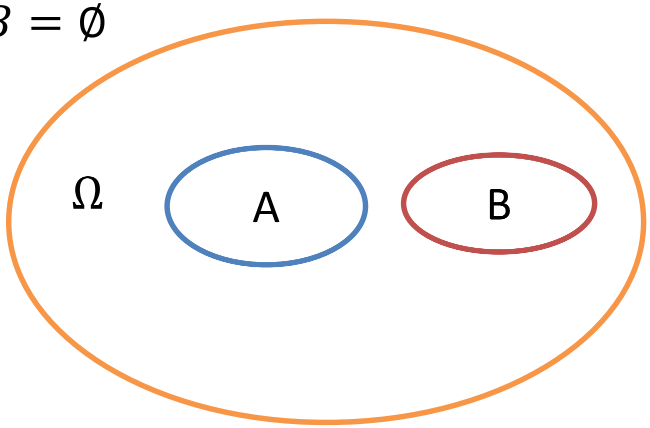
- A frequência relativa condicional é dada por

$$n(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{N}}{\frac{n(A)}{N}}$$

- Se 2 eventos A e B com $P(A) > 0$ são mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$ $(\mathrm{P}(A \cap B) = 0)$, tem-se

$$P(B|A) = 0$$

$A \cap B = \emptyset$

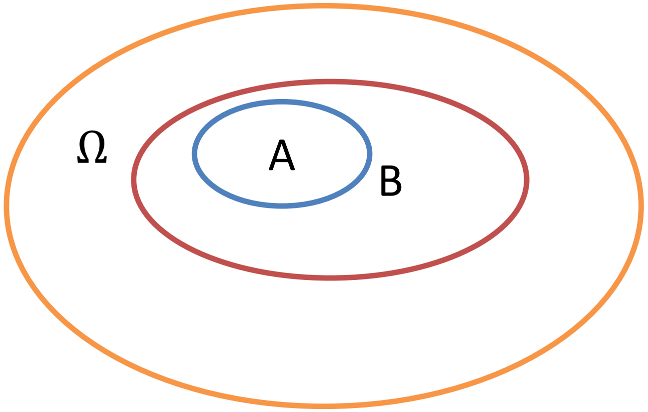


- Para 2 eventos A e B com $A \subset B$, tem-se

$$A \cap B = A$$

e

$$P(B|A) = 1$$

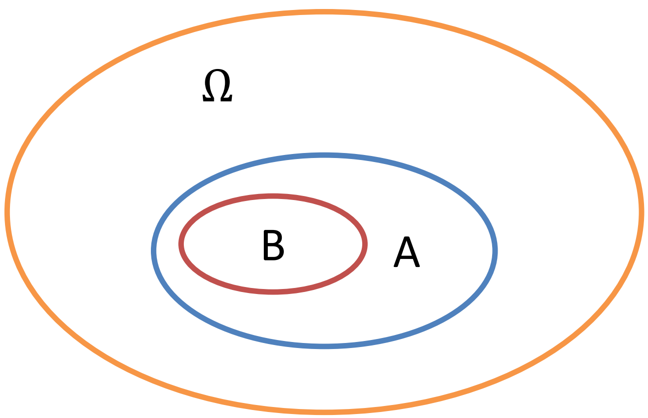


- Para 2 eventos A e B com $A \supset B$ e $P(A) > 0$, tem-se

$$A \cap B = B$$

e

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \geq P(B)$$



Exemplo 7

Considere uma rede de comunicações com 4 dispositivos em funcionamento (a, b, c, d), 5 enlaces $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, 3 posições da chave (I, II, III) sabendo-se que os enlaces podem estar em operação ou fora de operação.

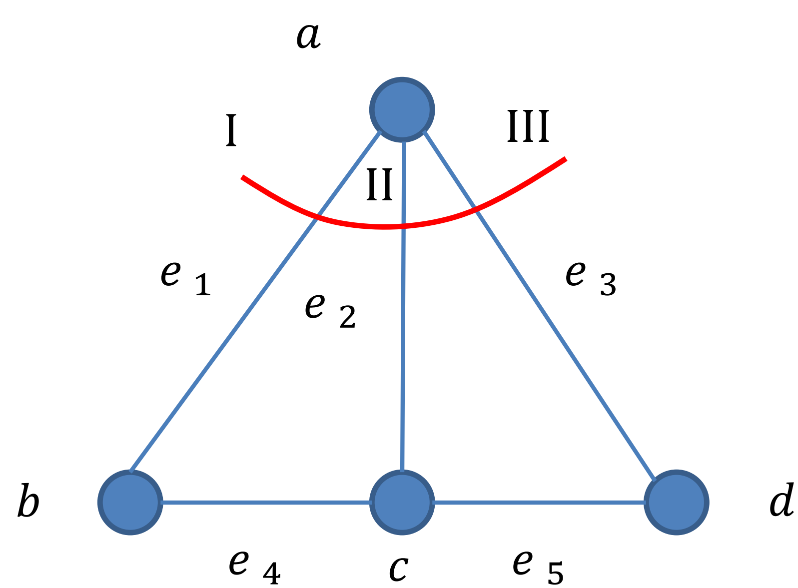
Suponha que as diferentes configurações de rede são equiprováveis. Calcule as probabilidades $P(A), P(B), P(A|B), P(C|D)$, em que

$A = \{\omega \in \Omega: a \text{ e } c \text{ podem se comunicar}\}$

$\mathrm{B} = \{\omega \in \Omega: b \text{ e } c \text{ podem se comunicar}\}$

$\mathrm{C} = \{\omega \in \Omega: \text{a chave está na posição } I\}$

$\mathrm{D} = A \cap B$



Solução:

Tem-se 96 pontos-amostra no espaço de amostras. A probabilidade de um ponto-amostra ω_i é

$$P(\omega_i) = p, \qquad \forall\, i.$$

Logo, tem-se

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{96} P(\omega_i) = 96p = 1 \;\rightarrow\; p = 1/96$$

Os eventos A e B são constituídos por 32 e 48 amostras, resultando em

$P(A) = 32p = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$ e $P(B) = 48p = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$

Para determinar $P(A|B)$, deve-se calcular $A \cap B$:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{I, 1, X, X, 1, X\} \cup \{II, X, 1, X, X, X\} \cup \{III, X, X, 1, X, 1\}$$
$$B = \{X, X, X, X, 1, X\}$$
$$A \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) = \{I, 1, X, X, 1, X\} \cup \{II, X, X, 1,1,1\} \cup \{III, X, X, 1,1,1\} \rightarrow 20\ pontos$$

Logo, tem-se $\mathrm{P}(A \cap B) = 20p = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$ e $\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{5}{12}$

Para obter $P(C|D)$ tem-se $C \cap D = C \cap A \cap B = \{I, 1, X, X, 1, X\}$ que resulta em

$$P(C|D) = \frac{2}{5}$$

v) Teorema da probabilidade total

- Definição 15: Partição do espaço de amostras

Um conjunto de eventos $\{B_i\}, i = 1,2, \dots, m$ constitui uma partição do espaço de amostras Ω quando

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \qquad \forall i, \qquad j = 1, \dots, n \ (i \neq j)$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \Omega$$

O conceito de partição é aplicável a qualquer evento $B_i \subset \Omega$.

Teorema da probabilidade total:

Considere um evento A e uma partição $\{B_j\}$, $j = 1,2,\ldots,m$

Para esta partição e este evento tem-se

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A \cap B_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P\left(A \middle| B_j\right) P(B_j)$$

Interseção é distributiva com relação à união

Demonstração:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{m} (A \cap B_j)$$

Com o desenvolvimento acima, tem-se

$$(A \cap B_j) \cap (A \cap B_k) = \emptyset, \qquad j, k = 1, \ldots, m \; (j \neq k)$$

Como $B_j \cap B_k = \emptyset$ para $j \neq k$ tem-se

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A \cap B_j)$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{m} P\left(A \middle| B_j\right) P(B_j)$$

vi) Regra de Bayes

Considere uma partição $\{B_j\}$, $j = 1, \ldots, m$ de Ω com $\mathrm{P}(B_j) > 0, \forall\, j$. Seja A um evento com $P(A) > 0$ e usando a definição de probabilidade condicional, tem-se

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B_j) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(B_j)}$$

As expressões acima permitem escrever

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

Usando o teorema da probabilidade total tem-se a regra de Bayes

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{m} P(A\cap B_k)}$$
$$= \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{k=1}^{m} P(A|B_k)P(B_k)},$$

em que $P(B_j)$é a probabilidade a priori e $P(B_j|A)$ é a probabilidade a posteriori.

A regra de Bayes expressa as probabilidades a posteriori em função das probabilidades condicionais e a priori.

Exemplo 8

Considere 4 caixas contendo componentes eletrônicos, que contém 2000, 500, 1000 e 1000 componentes.

Sabe-se que 5%, 40%, 10% e 10% dos componentes de cada caixa, respectivamente, são defeituosos.

A experiência consiste em retirar um componente ao acaso de uma das caixas. Determine a probabilidade de o componente ser defeituoso.

Solução:

Na construção do espaço de amostras Ω supõe-se que os componentes estejam numerados de 1 a 4500. A distribuição dos pontos-amostra de acordo com a caixa e os componentes defeituosos é descrito na tabela abaixo.

Caixa	Componentes bons	Componentes defeituosos
1	1900	100
2	300	200
3	900	100
4	900	100

Neste caso, pode-se definir 5 eventos:

$B_i = \{\omega : \omega \text{ é componente pertencente à caixa } i\}, i = 1,2,34$
$D = \{\omega : \omega \text{ é componente defeituoso}\}$

Para encontrar $P(D)$ considera-se que B_i formam uma partição de Ω e como as caixas são escolhidas ao acaso, tem-se

$$P(B_i) = \frac{1}{4}, i = 1,2,3,4$$

A probabilidade do evento D condicionada a cada B_i é igual ao produto do número de elementos defeituosos na caixa pela probabilidade de cada um destes elementos ser retirado:

$$P(D|B_1) = \frac{100}{2000} = 0,05$$
$$P(D|B_2) = \frac{200}{500} = 0,4$$
$$P(D|B_3) = P(D|B_4) = \frac{100}{1000} = 0,1$$

Pelo teorema da probabilidade total, obtém-se

$$P(D) = P(D|B_1)P(B_1) + P(D|B_2)P(B_2) + P(D|B_3)P(B_3) + P(D|B_4)P(B_4)$$
$$= 0{,}1625$$

Exemplo 9

No exemplo anterior, suponha que o componente retirado de uma das caixas tenha sido examinado e seja defeituoso.

Determine a probabilidade do componente ter sido retirado da caixa 2, ou seja, $P(B_2|D)$.

Solução:

A probabilidade condicional é dada por

$$P(B_2|D) = \frac{P(D|B_2)P(B_2)}{P(D)} = 0{,}615$$

vii) Independência estatística entre eventos

- Definição 16: Independência estatística entre dois eventos

Dois eventos A e B são estatisticamente independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A noção de independência é importante quando $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Usando a probabilidade condicional, tem-se

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

e

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

- Considere agora 2 situações envolvendo eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos.

- Se $P(A)$ e $P(B)$ são estritamente positivos e A e B são mutuamente exclusivos então os eventos A e B não são estatisticamente independentes.

- Assim, sendo $A \cap B = \emptyset$ tem-se $P(A \cap B) = 0$ e

$$P(B|A) = 0 \neq P(B)$$

- Se os eventos A e B são estatisticamente independentes e mutuamente exclusivos então pelo menos um dos eventos tem probabilidade nula.

Exemplo 10

Considere o lançamento de um dado e o espaço de amostras associado $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Sejam os eventos $A = \{1,2\}$ e $B = \{2,4,6\}$.

a) Calcule as probabilidades $P(A)$, $P(B)$ e $P(A|B)$.

b) Verifique se os eventos A e B são estatisticamente independentes ou mutuamente exclusivos.

Solução:

Supondo que as 6 faces do dado são equiprováveis, tem-se

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

Como $P(A|B) = P(A)$ os eventos A e B são estatisticamente independentes.

No entanto, como $A \cap B = \{2\}$, os eventos A e B não são eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos.

- Definição 17: Independência estatística entre eventos

Os eventos $\{A_k\},\ k = 1,2,\dots,n$ são estatisticamente independentes quando para qualquer conjunto de índices distintos

$$\{k_i\},\ i = 1,2,\dots,j \quad \text{com } k_i \in \{1,2,\dots,n\},\ i = 1,2,\dots,j$$

e $\qquad \forall\, j \in \{2,\dots,n\}$ tem-se

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{j} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{j} P\left(A_{k_i}\right)$$

- Em particular, para 3 eventos A_1, A_2 e A_3 esta condição se desdobraria em

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

- De acordo com $P\left(\bigcap_{i=1}^{j} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{j} P\left(A_{k_i}\right)$ n eventos são estatisticamente independentes quando a probabilidade de interseção de k $(2 \leq k \leq n)$ destes eventos é igual ao produto das probabilidades dos k eventos.

Exemplo 11

Considere 3 eventos A_1, A_2 e A_3 estatisticamente independentes.

Verifique as regras para independência estatística.

Solução:

Considera-se $n = 3 \ \rightarrow k_i \in \{1,2,3\}, i = 1,2, \dots, j, \forall\, j \in \{2,3\}$

Para $j = 2$ tem-se $P\left(\bigcap_{i=1}^{2} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{2} P\left(A_{k_i}\right),\ k_i \in \{1,2,3\}$ e

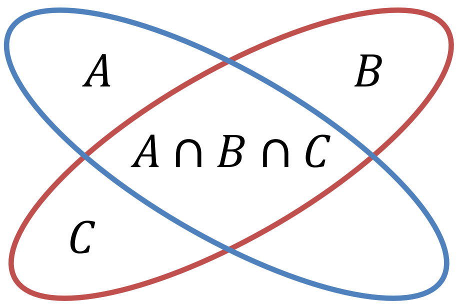
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

Para $j = 3$ tem-se $P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{3} P\left(A_{k_i}\right),\ k_i \in \{1,2,3\}$ e

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Exemplo 12

Considere 3 eventos A, B e C que satisfazem $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$



Verifique a independência estatística dos eventos com $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{27}$.

Solução:

Com os valores $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{27}$ tem-se

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{27} = P(A)P(B)P(C)$$

mas

$$P(A \cap B) = \frac{1}{27} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{9}$$

Logo, A, B e C não são estatisticamente independentes pois os eventos A e B não são estatisticamente independentes dois a dois.

D. Sistema de probabilidade

- Modelo matemático de um sistema de probabilidade:

$$S = (\Omega, \mathcal{A}, P),$$

em que Ω é o espaço de amostras, $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de eventos e P é a medida de probabilidade.

- Considere 2 experiências com espaços de amostras Ω_1 e Ω_2 e seus pontos-amostra $\omega_{i,1}$e $\omega_{j,2}$, respectivamente.

- O conjunto de todos os pontos-amostra $\omega_{i,1}$e $\omega_{j,2}$ constitui um novo conjunto Ω, que se chama produto cartesiano de Ω_1 e Ω_2 e é dado por

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

- Se Ω_1 e Ω_2 têm m e n elementos, respectivamente, o número total de elementos de Ω terá $m.n$.

- Desta forma, as 2 experiências podem ser analisadas como uma única experiência cujos resultados correspondem aos pares $(\omega_{i,1}, \omega_{j,2})$

- Se os sistemas de probabilidades são dados por

$$S_i = (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i),\ i = 1,2$$

então tem-se um sistema de probabilidade equivalente dado por

$$S = (\Omega, \mathcal{A}, P),$$

em que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ e P não é definida a partir de P_1 e P_2.

- Definição 18: independência entre 2 sistemas de probabilidade

Dois sistemas de probabilidade $S_1 = (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ e $S_2 = (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ são estatisticamente independentes quando para todo evento $A_1 \in \mathcal{A}_1$ e todo evento $A_2 \in \mathcal{A}_2$ tem-se

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

em que P é a medida de probabilidade da experiência combinada.

Observação: essa abordagem é útil para analisar uma experiência como combinação de 2 experiências às quais estão associadas sistemas de probabilidade independentes.

Exemplo 13

Considere a experiência combinada de se jogar 1 dado e 1 moeda.

Calcule a probabilidade ao evento de se sortear face 1 e cara.

Solução: Para calcular essa probabilidade é possível considerar uma única experiência com espaço de amostras dado por

$$\omega = \{f_i, k_j\}, i = 1,2, \dots 6, j = 1,2$$

em que f_i e k_j representam as faces do dado e da moeda, respectivamente.

Supondo-se k_1 correspondente à cara, considere os seguintes eventos:

$$A_i = \{(f_i, k_1), (f_i, k_2)\}, i = 1,2, \dots 6$$

e

$$B_j = \{(f_1, k_j), (f_2, k_j), (f_3, k_j), (f_4, k_j), (f_5, k_j), (f_6, k_j)\}, j = 1,2$$

Tem-se então

$$\{\omega: face\ 1\ e\ cara\} = A_1 \cap B_1 = \{f_1, k_1\}$$

Admitindo-se probabilidades tal que

$$P(A_i) = \frac{1}{6}, i = 1,2, \dots, 6$$
$$P(B_j) = q_j, j = 1,2$$

Supondo-se A_i e B_j independentes tem-se

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\, P(B_1) = \frac{1}{6} q_j$$

Considere agora que a experiência é a combinação de 2 experiências elementares (dado e moeda).

À primeira experiência está associado um sistema de probabilidade com

$$\Omega_1 = \{(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)\}$$

com medida de probabilidade definida por $P_1(f_i) = \frac{1}{6}, i = 1,2, \dots, 6$

Para a segunda experiência tem-se

$$\Omega_2 = \{(k_1, k_2)\} \text{ e } P_2(k_j) = q_j, j = 1,2$$

Supondo-se que às 2 experiências estão associados sistemas de probabilidade independentes tem-se

$$P(f_1, k_1) = \frac{1}{6} q_j$$

Exemplo 14

Uma caixa contém 10 bolas brancas e 5 vermelhas, e uma segunda caixa contém 20 bolas brancas e 20 vermelhas. Retira-se uma bola de cada caixa.

Determine:

a) A probabilidade de retirar 1 bola branca da 1ª caixa e 1 bola vermelha da 2ª caixa.

b) A probabilidade de retirar 1 bola branca e 1 bola vermelha.

Solução:

Considere a experiência combinada constituída por 2 experiências independentes.

A primeira experiência está associada ao espaço de amostras Ω_1 com 15 pontos-amostra e os seguintes eventos:

$$B_1 = \{\omega_1 \in \Omega_1 : \text{a bola retirada é branca}\}$$

$$V_1 = \{\omega_1 \in \Omega_1 : \text{a bola retirada é vermelha}\}$$

Definindo-se a medida de probabilidade da experiência e supondo-se igual probabilidade a cada ponto-amostra, tem-se

$$P_1(B_1) = 10\frac{1}{15} = \frac{2}{3} \text{ e } P_1(V_1) = 5\frac{1}{15} = \frac{1}{3}$$

A segunda experiência está associada ao espaço de amostras Ω_2 com 40 pontos-amostra e os seguintes eventos:

$$B_2 = \{\omega_2 \in \Omega_2\text{: a bola retirada é branca }\}$$

$$V_2 = \{\omega_2 \in \Omega_2\text{: a bola retirada é vermelha }\}$$

Definindo-se a medida de probabilidade da experiência e supondo-se igual probabilidade a cada ponto-amostra, tem-se

$$P_2(B_2) = 20\frac{1}{40} = \frac{1}{2} \text{ e } P_2(V_2) = 20\frac{1}{40} = \frac{1}{2}$$

As probabilidades dos itens da questão são dadas por

a) $P(B_1 \text{ x } V_2) = P_1(B_1)P_2(V_2) = \frac{1}{3}$

b) $P\big((B_1 \text{ x } V_2) \cup (B_2 \text{ x } V_1)\big) = P(B_1 \text{ x } V_2) + P(B_2 \text{ x } V_1)$

$$= P_1(B_1)P_2(V_2) + P_2(B_2)P_1(V_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- Definição 19: Sistemas de probabilidade independentes

Considere n sistemas de probabilidade $S_k = (\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$, $\mathrm{k} = 1,2, \dots , n$ associados a n experiências e uma coleção de n eventos tal que

$$A_{ik} \in \mathcal{A}_k, \mathrm{k} = 1,2, \dots , \mathrm{n}$$

Os sistemas de probabilidade S_k , $\mathrm{k} = 1,2, \dots , n$ são independentes quando a medida de probabilidade P associada à experiência combinada é tal que

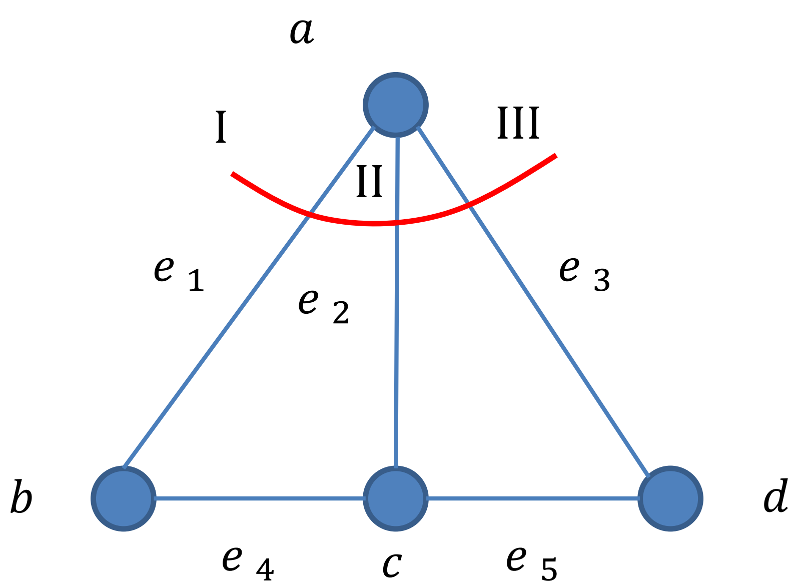
$$P(A_{i1} \times A_{i2} \times \cdots \times A_{in}) = P_1(A_{i1})P_2\,(A_{i2}) \dots P_n\,(A_{in})$$

para toda coleção $\{A_{ik}\}$ que satisfaz a expressão acima.

Exemplo 15

Considere o problema da rede de comunicações em que as 3 posições da chave são equiprováveis e que a probabilidade do enlace estar fora de operação é p.

Calcule as probabilidades P(A), P(B), P(A|B) e P(C|D), em que os eventos A, B, C e D foram definidos anteriormente.



Solução:

O espaço de amostras correspondente à posição da chave S é dado por

$$\Omega_c = (I, II, III)$$

e os espaços de amostras correspondentes aos enlaces são dados por

$$\Omega_i = (0,1),\ i = 1,2,3,4,5$$

O evento A pode ser escrito como a união de 3 eventos disjuntos:

$$A_1 = \{I\} \times \{1\} \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \{1\} \times \Omega_5$$
$$A_2 = \{II\} \times \Omega_1 \times \{1\} \times \Omega_3 \times \Omega_4 \times \Omega_5$$
$$A_3 = \{III\} \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times \{1\} \times \Omega_4 \times \{1\}$$

Supondo que os sistemas de probabilidades são independentes, tem-se

$$P(A_1) = P_c(\{I\})P_1(\{1\})P_2(\Omega_2)\ P_3(\Omega_3)P_4(\{1\})P_5(\Omega_5) = \frac{(1-p)^2}{3}$$

$$P(A_2) = \frac{(1-p)}{3}$$

$$P(A_3) = \frac{(1-p)^2}{3}$$

Logo, obtém-se

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{(1-p)(3-2p)}{3}$$

No caso do evento B tem-se

$$B = \Omega_c \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \{1\} \times \Omega_5$$

o que resulta em

$$P(B) = (1 - p)$$

No caso do evento $A \cap B$ tem-se

$$A \cap B = (\{I\} \times \{1\} \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \{1\} \times \Omega_5) \cup (\{II\} \times \Omega_1 \times \{1\} \times \Omega_3 \times \{1\} \times \Omega_5) \\ \cup (\{III\} \times \Omega_1 \times \Omega_2 \times \{1\} \times \{1\} \times \{1\})$$

o que resulta em

$$P(A \cap B) = \frac{(1 - p)^2\,(3 - p)}{3}$$

e

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(1 - p)\,(3 - p)}{3}$$

No caso do evento $C \cap D$ tem-se

$$C \cap D = \{I\} \times \{1\} \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \{1\} \times \Omega_5$$

o que resulta em

$$P(C \cap D) = \frac{(1-p)^2}{3}$$

e

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C \cap D)}{P(A \cap B)} = \frac{1}{3-p}$$