Princípios de Comunicações

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, DEE, PUC-Rio
delamare@puc-rio.br

III. Modulação analógica

A. Princípios de modulação

B. Modulação em amplitude

C. Aplicações de modulação em amplitude

D. Modulação em ângulo

E. Aplicações de modulação em ângulo

Introdução

- Neste capítulo, é estudada a transmissão de sinais analógicos por modulação usando portadoras.

- Na modulação analógica, a informação é incluída na amplitude, fase ou frequência.

- Em particular, considera-se as seguintes técnicas de modulação analógica:

  - Modulação em amplitude (AM)

  - Modulação em fase (PM)

  - Modulação em frequência (FM)

  Modulações em ângulo

A. Princípios de modulação

- Considere o problema de transmissão de um sinal analógico $m(t)$ passa-baixa com largura de faixa W e potência

$$P_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |m(t)|^2 dt$$

- Esse sinal analógico $m(t)$ contém uma mensagem e é transmitido através de um canal de comunicações usando uma portadora da forma

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c)\,,$$

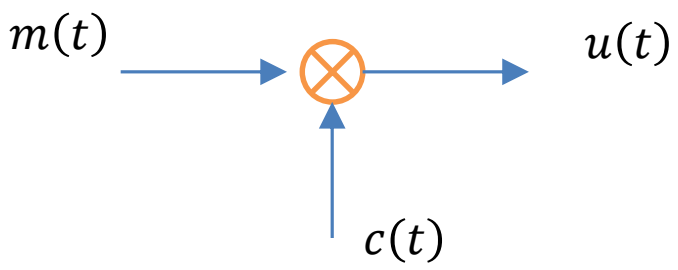
em que A_c é a amplitude, f_c é a frequência e ϕ_c é a fase.

- O sinal que contém a mensagem $m(t)$ modula a portadora $c(t)$ em amplitude, fase ou frequência conforme descrito por

$$u(t) = m(t)c(t),$$

em que a modulação converte $m(t)$ de um sinal passa-baixa para um sinal passa-faixa na vizinhança da frequência f_c.

- O procedimento de modulação é ilustrado abaixo.



Dentre os objetivos da modulação estão:

- Deslocar a frequência de um sinal passa-baixa para um sinal passa-faixa de um canal com uma faixa de frequências disponível.

- Simplificar a estrutura do transmissor e do receptor usando frequências altas que requerem antenas com pequenas dimensões.

- Permitir transmissão simultânea de sinais usando multiplexação por divisão de frequência (FDM).

- Expandir a largura de faixa do sinal transmitido para aumentar sua resistência a ruído e interferência.

B. Modulação em amplitude

- Na modulação em amplitude (AM), a mensagem $m(t)$ é colocada na amplitude de uma portadora $c(t)$.

- Dentre as técnicas de modulação AM, que possuem sinais transmitidos com características espectrais diferentes, incluem-se:

  - A modulação AM Double Sideband Suppressed Carrier (DSB-SC)

  - A modulação AM Double Sideband (DSB) convencional

  - A modulação AM Single Sideband (SSB)

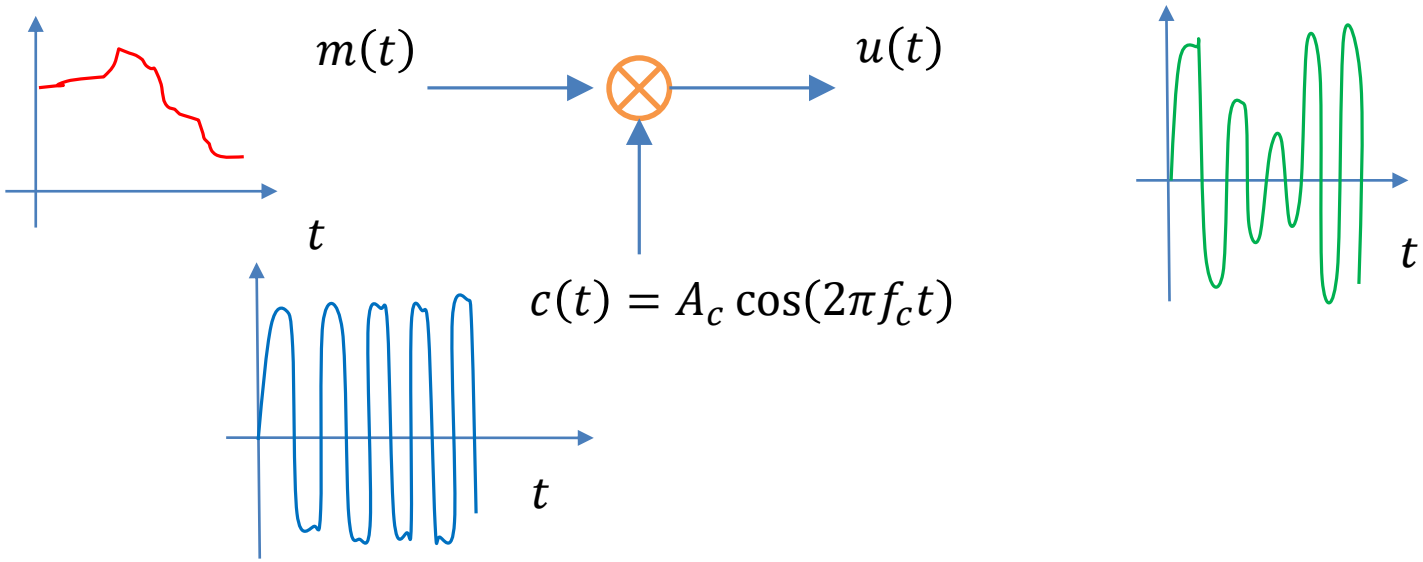
  - A modulação AM Vestigial Sideband (VSB)

DSB-SC AM

- Um sinal DSB-SC AM é obtido multiplicando-se a mensagem $m(t)$ por uma portadora $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= m(t)c(t) \\
&= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t),
\end{aligned}
$$

que é ilustrada nas figuras abaixo

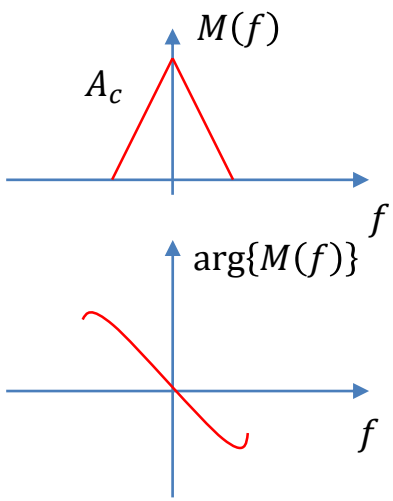


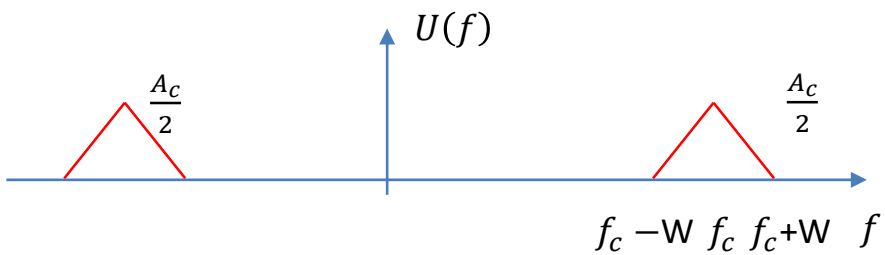
Espectro do sinal DSB-SC AM

- O espectro do sinal DSB-SC AM pode ser obtido calculando-se a transformada de Fourier de $u(t)$:

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \Im\{A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2}M(f - f_c) + \frac{A_c}{2}M(f + f_c),$$

em que a largura de faixa necessária para transmitir $u(t)$ é $B = 2W$, conforme ilustrado abaixo.





- O sinal DSB-SC AM $u(t)$ não contém um componente de portadora, o que significa que a potência transmitida está contida em $m(t)$:

$$P_u = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_c^2 m^2(t) cos^2(2\pi f_c t)dt$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} m^2(t)[1 + cos^2(4\pi f_c t)]dt = \frac{A_c^2}{2} P_m,$$

em que P_m é a potência em $m(t)$.

Exemplo 1

Considere uma transmissão com modulação DSB-SC AM com uma mensagem $m(t) = \mathrm{a}\cos(2\pi f_m t)$, em que $f_m \ll f_c$ e f_c é a frequência da portadora usada, que é descrita por $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$.

Determine o sinal DSB-SC AM no tempo e na frequência, e as bandas laterais superior e inferior.

Solução:

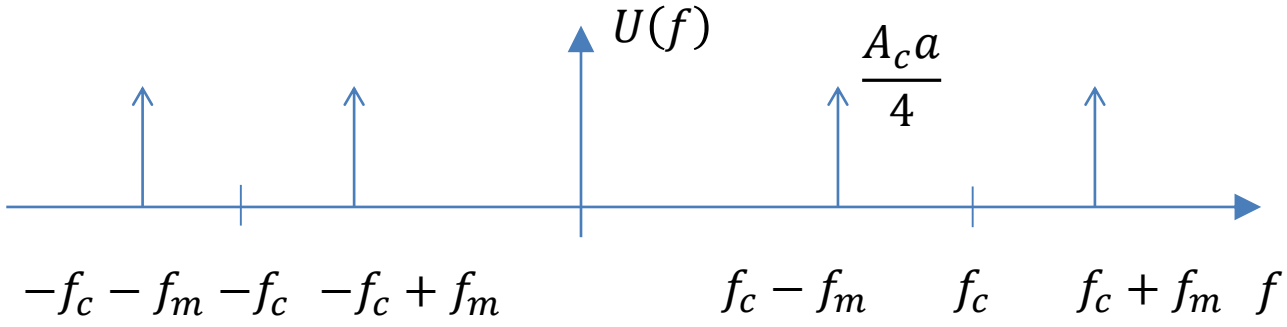
O sinal modulado a ser transmitido é descrito por

$$u(t) = m(t)c(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) = A_c a\cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)$$
$$= \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi((f_c - f_m)t) + \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi((f_c + f_m)t)$$

No domínio da frequência, tem-se

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \underbrace{\frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)]}_{U_i(f)-\text{banda inferior}}$$
$$+ \underbrace{\frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)]}_{U_s(f)-\text{banda superior}}$$

Ilustração:



Exemplo 2

Determine a potência do sinal modulado $m(t) = \mathrm{a}\cos(2\pi f_m t)$ e a potência de cada uma das bandas laterais.

Solução:

A potência da mensagem é dada por

$$P_m = \frac{a^2}{2}$$

A potência do sinal transmitido é descrita por

$$P_u = \frac{A_c^2}{2} P_m = \frac{A_c^2 a^2}{4}$$

As potências nas bandas laterais inferior e superior são

$$P_{ui} = P_{us} = \frac{A_c^2 a^2}{8}$$

Demodulação de sinais DSB-SC AM

- A demodulação consiste em desfazer o efeito da modulação e deslocar um sinal passa-faixa para a origem, tornando-o um sinal passa-baixa.

- Considere a transmissão de um sinal DSB-SC AM $u(t)$ em um canal sem distorção e sem ruído. O sinal recebido é descrito por

$$r(t) = u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

- Suponha que o sinal recebido seja demodulado através da multiplicação de uma portadora com uma fase ϕ:

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(\phi) + \frac{1}{2} A_c m(t) \cos(4\pi f_c t + \phi) \end{aligned}$$

- Como a mensagem $m(t)$ é limitada em faixa a W Hz, pode-se projetar um filtro passa-baixa para reter a componente

$$\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi)$$

- Com isso, elimina-se os componentes com frequências acima de W Hz:

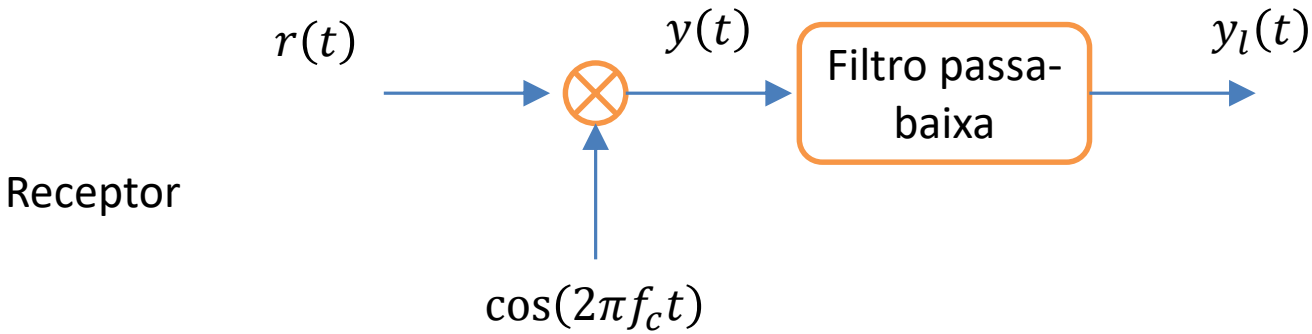
$$\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(4\pi f_c t + \phi)$$

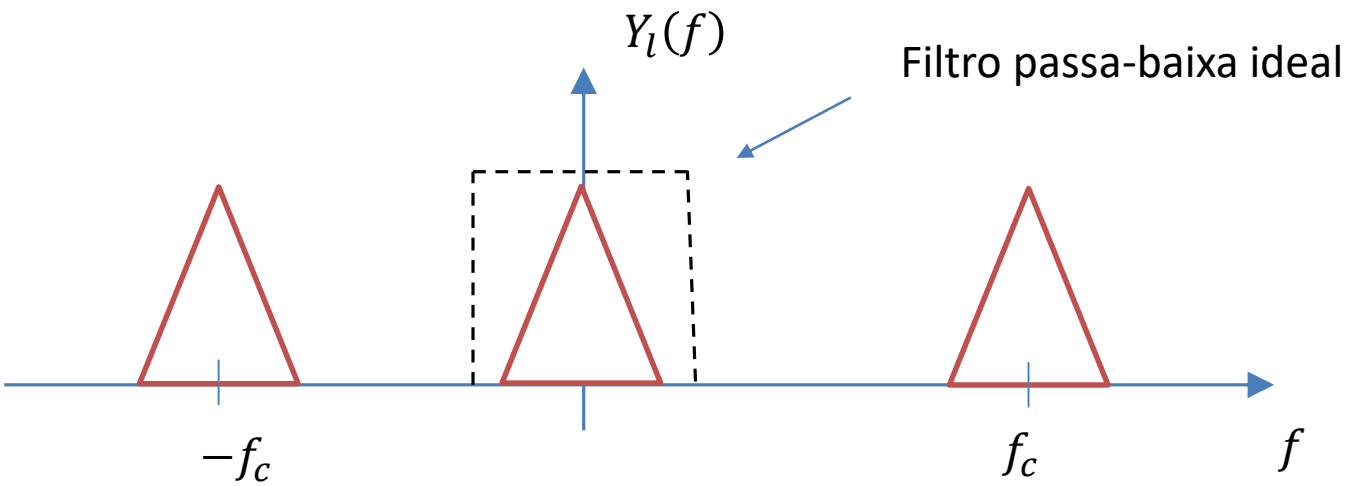
- Logo, a saída do filtro passa-baixa ideal é dada por

$$y_l(t) = \frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi),$$

que indica que a potência do sinal demodulado é reduzida de $\cos^2(\phi)$.

Ilustração do procedimento de demodulação





Demodulação de sinais DSB-SC AM em presença de ruído

- Considere a demodulação de um sinal DSB-SC AM $u(t)$ em um canal sem distorção em presença de ruído. O sinal recebido é descrito por

$$
\begin{aligned}
r(t) &= u(t) + n(t) \\
&= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) + n_s(t)\, sen(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

- Suponha que o sinal recebido seja demodulado através da multiplicação de uma portadora com uma fase ϕ:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= r(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\
&= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\
&= \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(4\pi f_c t + \phi) \\
&\quad + \frac{1}{2}[n_c(t)\cos(\phi) + n_s(t) sen(\phi)] \\
&\quad + \frac{1}{2}[n_c(t)\cos(4\pi f_c t + \phi) - n_s(t)\cos(4\pi f_c t + \phi)]
\end{aligned}
$$

- O sinal demodulado é aplicado a um filtro passa-baixa, que rejeita os componentes de frequências altas e produz

$$y_l(t) = \frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2}[n_c(t)\cos(\phi) + n_s(t)sen(\phi)]$$

- Supondo-se que a demodulação é perfeita ($\phi = 0$), obtém-se

$$y_l(t) = \frac{1}{2}A_c m(t) + \frac{1}{2}n_c(t)$$

Razão sinal-ruído

- A potência do sinal $\mathrm{u}(t)$ é descrita por

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} P_m,$$

em que P_m é a potência de $m(t)$.

- A potência do ruído no receptor é dada por

$$P_{no} = \frac{1}{4} P_{n_c} = \frac{1}{4} P_n = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = \frac{1}{4} 2 \int_{f_c - W}^{f_c + W} \frac{N_0}{2} df = \frac{1}{4}\, 2WN_0$$

- Com o desenvolvimento anterior, pode-se definir a razão sinal-ruído (SNR):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_o}{P_{no}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_m}{\frac{1}{4}\, 2WN_0} = \frac{A_c^2 P_m}{2WN_0} = \frac{P_R}{WN_0},$$

em que $P_R = \frac{A_c^2}{2} P_m$ é a potência recebida.

Exemplo 3

Considere uma mensagem $m(t)$ e sua função autocorrelação

$$R_M(\tau) = 16\text{sinc}^2(10000\tau)$$

Essa mensagem é transmitida para um destino usando um sinal DSB-SC AM sobre um canal com 50dB de atenuação e ruído AWGN com

$$S_n = \frac{N_0}{2} = 10^{-12} W/Hz.$$

Suponha que um engenheiro deseja obter uma SNR na recepção de pelo menos 50dB. Qual deveria ser a potência de transmissão P_T?

Solução:

A densidade espectral de potência de $m(t)$ é dada por

$$S_M(f) = \Im\{R_M(\tau)\} = \frac{16}{10000}\text{tri}\left(\frac{f}{10000}\right),$$

que mostra que $\mathrm{W} = 10000 = 10kHz$ e $\mathrm{B} = 2\mathrm{W} = 20\mathrm{KHz}$

A SNR é descrita por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_R}{WN_0} = \frac{10^8}{2}P_R$$

Como a atenuação do canal é 50dB, tem-se

$$10\log\frac{P_T}{P_R} = 50 \text{ -> } P_R = 10^{-5}P_T$$

Para um sinal DSB-SC AM, tem-se

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_R}{WN_0} = \frac{10^{-5}P_T}{WN_0} = 50dB = 10^5$$

Logo, P_T é dado por

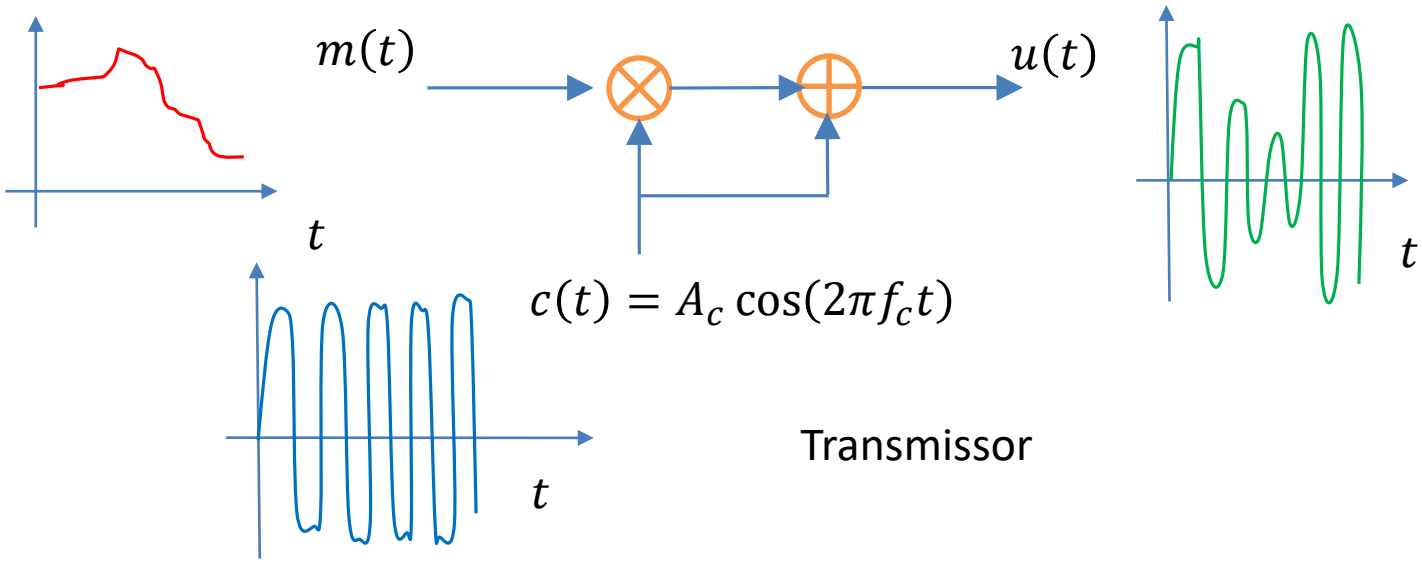
$$P_T = \frac{10^5 WN_0}{10^{-5}} = 200 \text{ Watts}$$

DSB AM convencional

- Um sinal DSB AM convencional é obtido multiplicando-se a mensagem $m(t)$ por uma portadora $c(t)$ e adicionando-se um componente de $c(t)$:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= [1 + m(t)]c(t) \\
&= A_c[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t),
\end{aligned}
$$

em que $|m(t)| \leq 1$ e é ilustrado nas figuras abaixo



- A vantagem do componente da portadora usado em DSB AM convencional é que o demodulador se torna muito simples.

- A simplicidade de demodulação de sinais em DSB AM convencionais motivou a adoção em sistemas de difusão AM comerciais.

- A mensagem $m(t)$ usada em DSB AM convencional permite a expressão

$$m(t) = am_n(t),$$

em que $0 < a < 1$ é o índice de modulação e $m_n(t)$ é normalizado de modo que o valor mínimo é -1, tem-se $1 + am_n(t) > 0$ e

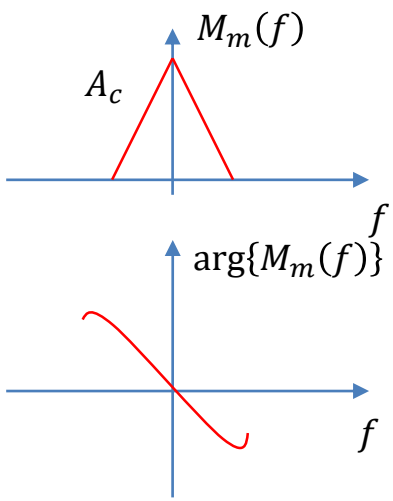
$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max|m(t)|}$$

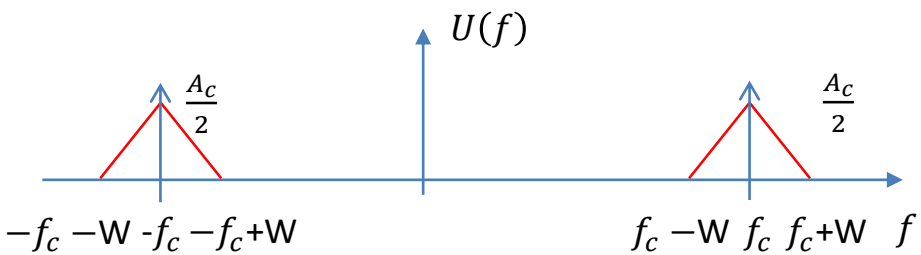
Espectro do sinal DSB AM convencional

- O espectro do sinal DSB AM convencional pode ser obtido calculando-se a transformada de Fourier de $u(t)$:

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \Im\{A_c \cos(2\pi f_c t)\} + \Im\{a m_n(t) A_c \cos(2\pi f_c t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c a}{2}[M_m(f - f_c) + M_m(f + f_c)],$$

em que a largura de faixa necessária para transmitir $u(t)$ é $B = 2W$, conforme ilustrado abaixo.





Exemplo 4

Considere o sinal de mensagem $m(t) = a\cos(2\pi f_m t)$, $\mathrm{f_m} \ll \mathrm{f_c}$.

Determine o sinal DSB AM convencional, as suas bandas laterais e o seu espectro, supondo-se um índice de modulação igual a a.

Solução:

O sinal DSB AM convencional é expresso por

$$
\begin{aligned}
u(t) &= A_c[1 + m(t)]\cos(2\pi f_c t) \\
&= A_c[1 + a\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t) \\
&= A_c\cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi(f_c + f_m)t),
\end{aligned}
$$

em que o componente da banda lateral inferior é

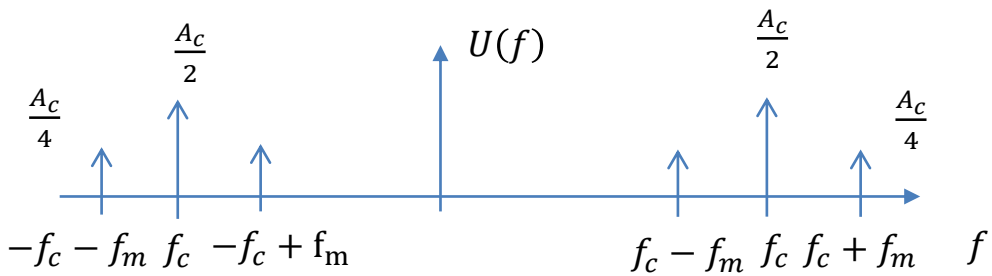
$$u_l(t) = \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi(f_c - f_m)t)$$

e o componente da banda lateral superior é

$$u_u(t) = \frac{A_c a}{2}\cos(2\pi(f_c + f_m)t)$$

O espectro de $u(t)$ é dado por

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \Im\{A_c \cos(2\pi f_c t)\} + \Im\{A_c a \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)]$$
$$+ \frac{A_c a}{4}[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)],$$



Demodulação de sinais DSB AM convencionais

- O sinal DSB AM convencional recebido no demodulador é descrito por

$$r(t) = u(t) + n(t)$$
$$= (A_c[1 + am_n(t)] + \ n_c(t)) \ \cos(2\pi f_c t) \ \ -n_s(t)\, sen(2\pi f_c t)\,,$$

- Supondo-se uma demodulação síncrona com conhecimento perfeito de fase, após uma filtragem passa-baixa obtém-se

$$y_l(t) = \frac{1}{2}(A_c[1 + am_n(t)] + \ n_c(t))$$

- Como o sinal desejado é $m(t)$ e não $[1 + am_n(t)]$, o componente DC da forma de onda demodulada é removida e a saída do filtro é

$$y'_l(t) = \frac{1}{2}A_c am_n(t) + \frac{1}{2}n_c(t)$$

- A potência do sinal recebido é descrita por

$$P_R = \frac{A_c^2}{2}\left[1 + a^2 P_{M_m}\right]$$

- A SNR é descrita por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{\frac{A_c^2}{4} a^2 P_{M_m}}{\frac{1}{4}\, P_{n_c}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} a^2 P_{M_m}}{2WN_0}$$

$$= \frac{a^2 P_{M_m}}{1 + a^2 P_{M_m}} \frac{\frac{A_c^2}{2}\left[1 + a^2 P_{M_m}\right]}{WN_0}$$

$$= \underbrace{\frac{a^2 P_{M_m}}{1 + a^2 P_{M_m}}}_{\eta} \frac{P_R}{WN_0},$$

em que η é a eficiência da modulação.

- A potência do sinal DSB AM convencional é dada por

$$P_u = \frac{A_c^2}{2} P_m,$$

em que a potência da mensagem é descrita por

$$P_m = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [1 + a m_n(t)]^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 + a^2 m_n^2(t)\, dt,$$

em que a média de $m_n(t)$ é zero.

- Logo, tem-se para DSB AM convencional

$$P_m = 1 + \mathrm{a}^2 \mathrm{P}_{\mathrm{m_n}}$$

e

$$P_u = \frac{A_c^2}{2} \left(1 + \mathrm{a}^2 \mathrm{P}_{\mathrm{m_n}}\right) = \frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2}{2} \mathrm{a}^2 \mathrm{P}_{\mathrm{m_n}}$$

Exemplo 5

O sinal $m(t) = 3\cos(200\pi t) + \text{sen}\,(600\pi t)$ é usado para modular

$$c(t) = \cos(2 \times 10^5 t),$$

em que $a = 0{,}85$ de um sistema de transmissão DSB AM convencional.

Determine a potência do componente da portadora e nos componentes das bandas laterais.

Solução:

Para calcular $m_n(t)$, é necessário determinar $\max|m(t)|$, o que pode ser feito derivando-se o sinal com relação a t e equacionando-se o resultado a zero:

$$m'(t) = -600\pi\,\mathrm{sen}(200\pi t) + 600\pi\cos(600\pi t) = 0$$

$$\cos(600\pi t) = \mathrm{sen}(200\pi t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 200\pi t\right)$$

A solução é dada por $t_o = \frac{1}{1600}$

$$m(t_o) = m\left(\frac{1}{600}\right) = 3{,}69$$

Logo, tem-se

$$m_n(t) = \frac{3\cos(200\pi t) + sen(600\pi t)}{m(t_o)} = 0{,}818\cos(200\pi t) + 0{,}27\mathrm{sen}(600\pi t)$$

A potência de $m_n(t)$ é dada por

$$P_{m_n} = \frac{1}{2}[0{,}818^2 + 0{,}272^2] = 0{,}36$$

A potência da componente da portadora é

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} = 0{,}5$$

A potência nas bandas laterais é

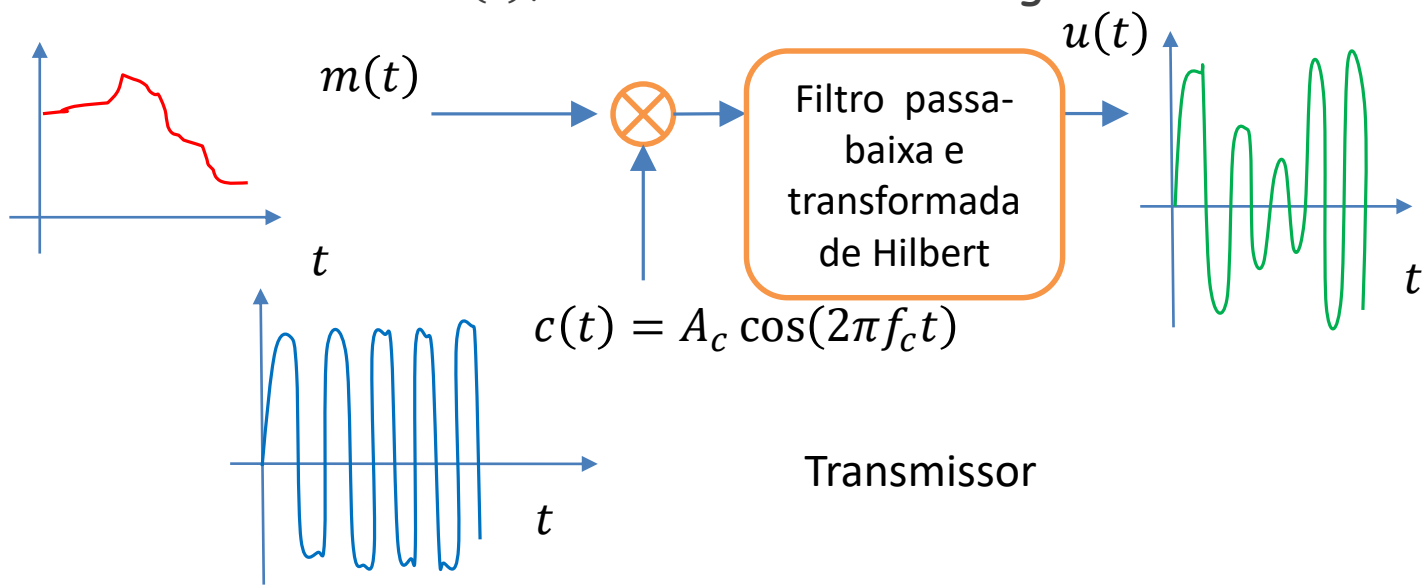
$$P_{u|l} = \frac{A_c^2}{2} a^2 P_{m_n} = 0{,}13$$

SSB AM

- Um sinal SSB AM é obtido multiplicando-se a mensagem $m(t)$ por uma portadora $c(t)$ e adicionando-se a sua transformada de Hilbert:

$$u(t) = Re\{A_c(m(t) + j\hat{m}(t))e^{j2\pi f_c t}\}$$
$$= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \hat{m}(t)\, sen(2\pi f_c t),$$

em que - corresponde à faixa superior e + à inferior e $\hat{m}(t)$ é a transformada de Hilbert de $m(t)$, como ilustrado nas figuras abaixo

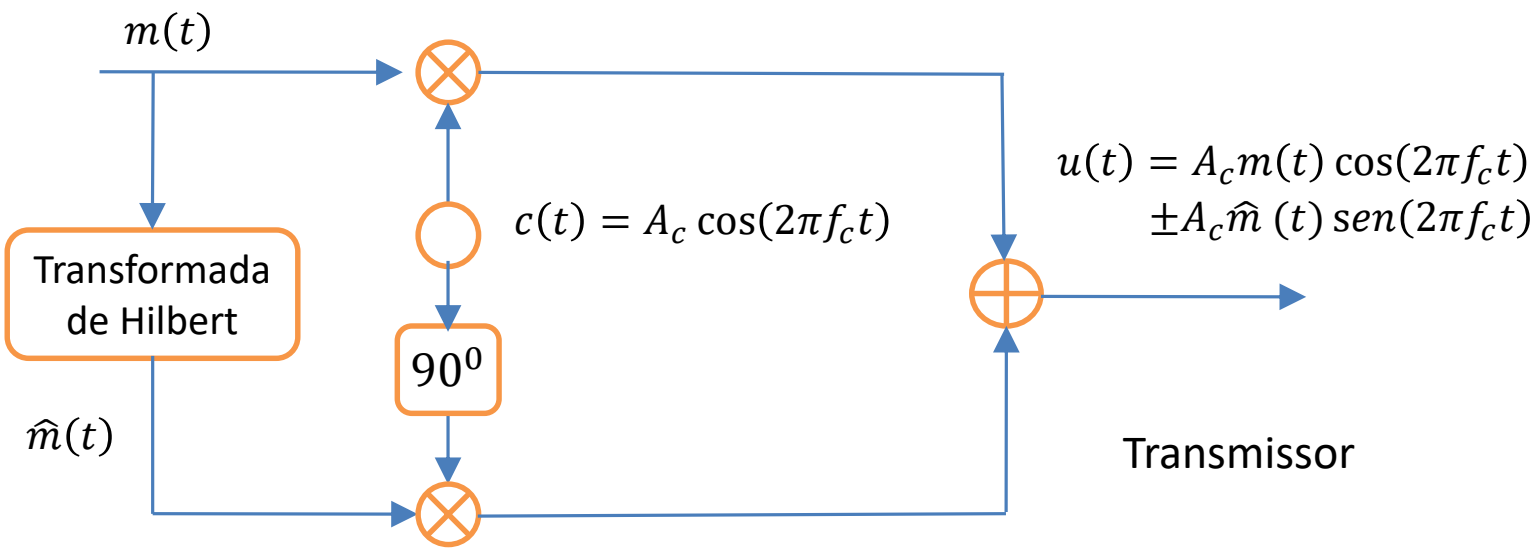


Transmissor

- A ideia da modulação SSB AM é que qualquer uma das bandas laterais é suficiente para reconstruir a mensagem no receptor.

- A modulação SSB AM emprega apenas metade da largura de faixa requerida pelas modulações DSB-SC AM e DSB AM convencional.

- Uma estrutura alternativa para geração de sinais SSB AM é mostrada abaixo.

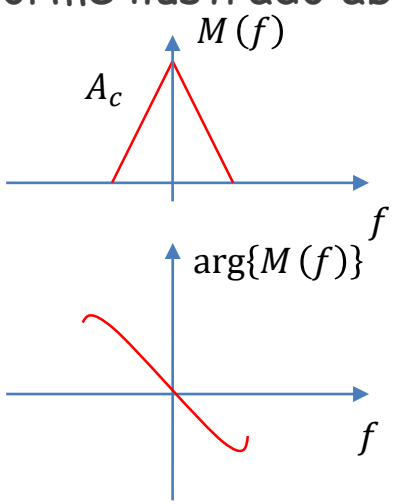


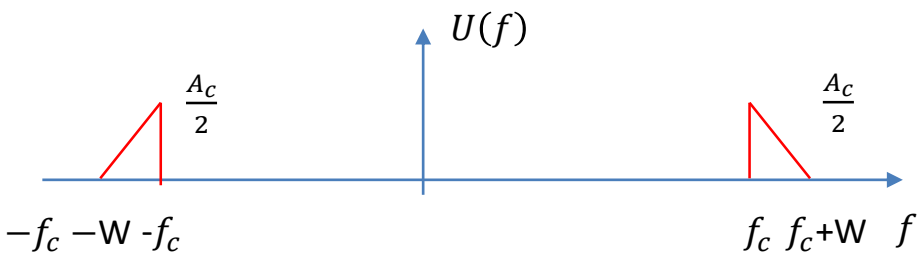
Espectro do sinal SSB AM

- O espectro do sinal SSB AM pode ser obtido calculando-se a transformada de Fourier de $u(t)$:

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \Im\{A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\} \pm \Im\{A_c \widehat{m}\,(t)\, sen(2\pi f_c t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2}\left[M\,(f - f_c) + M\,(f + f_c)\right] \pm \frac{A_c}{2j}\left[\widehat{M}\,(f - f_c) + \widehat{M}\,(f + f_c)\right],$$

em que a largura de faixa necessária para transmitir $u(t)$ é $B = W$, conforme ilustrado abaixo.





Exemplo 6

Considere o sinal de mensagem $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, $\mathrm{f_m} \ll \mathrm{f_c}$.

Determine os possíveis sinais SSB-AM que usam esse sinal de mensagem.

Solução:

A transformada de Hilbert do sinal $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ é dada por

$$\widehat{m}(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_m t)$$

Substituindo-se as expressões acima para o sinal SSB AM, tem-se

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \widehat{m}\,(t)\, sen(2\pi f_c t) \\ &= A_c \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \operatorname{sen}(2\pi f_m t)\, sen(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

A faixa lateral superior é descrita por

$$u_u(t) = A_c \cos(2\pi(f_c + f_m)t)$$

enquanto a faixa lateral inferior é dada por

$$u_l(t) = A_c \cos(2\pi(f_c - f_m)t)$$

Demodulação de sinais SSB AM

- A demodulação de sinais SSB AM consiste em recuperar a mensagem usando um demodulador coerente ou síncrono e um filtro passa-baixa.

- Considere a transmissão de um sinal SSB AM $u(t)$ em um canal sem distorção e sem ruído. O sinal recebido é descrito por

$$r(t) = u(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \widehat{m}\,(t)\, sen(2\pi f_c t)$$

- Suponha que o sinal recebido seja demodulado através da multiplicação de uma portadora com uma fase ϕ:

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \pm A_c \widehat{m}\,(t)\, sen(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2} A_c \widehat{m}\,(t)\,\mathrm{sen}(\phi) + \text{termos com alta frequência} \end{aligned}$$

- Como a mensagem $m(t)$ é limitada em faixa a W Hz, pode-se projetar um filtro passa-baixa para reter as componentes

$$\frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2}A_c \widehat{m}\,(t)\,\mathrm{sen}(\phi)$$

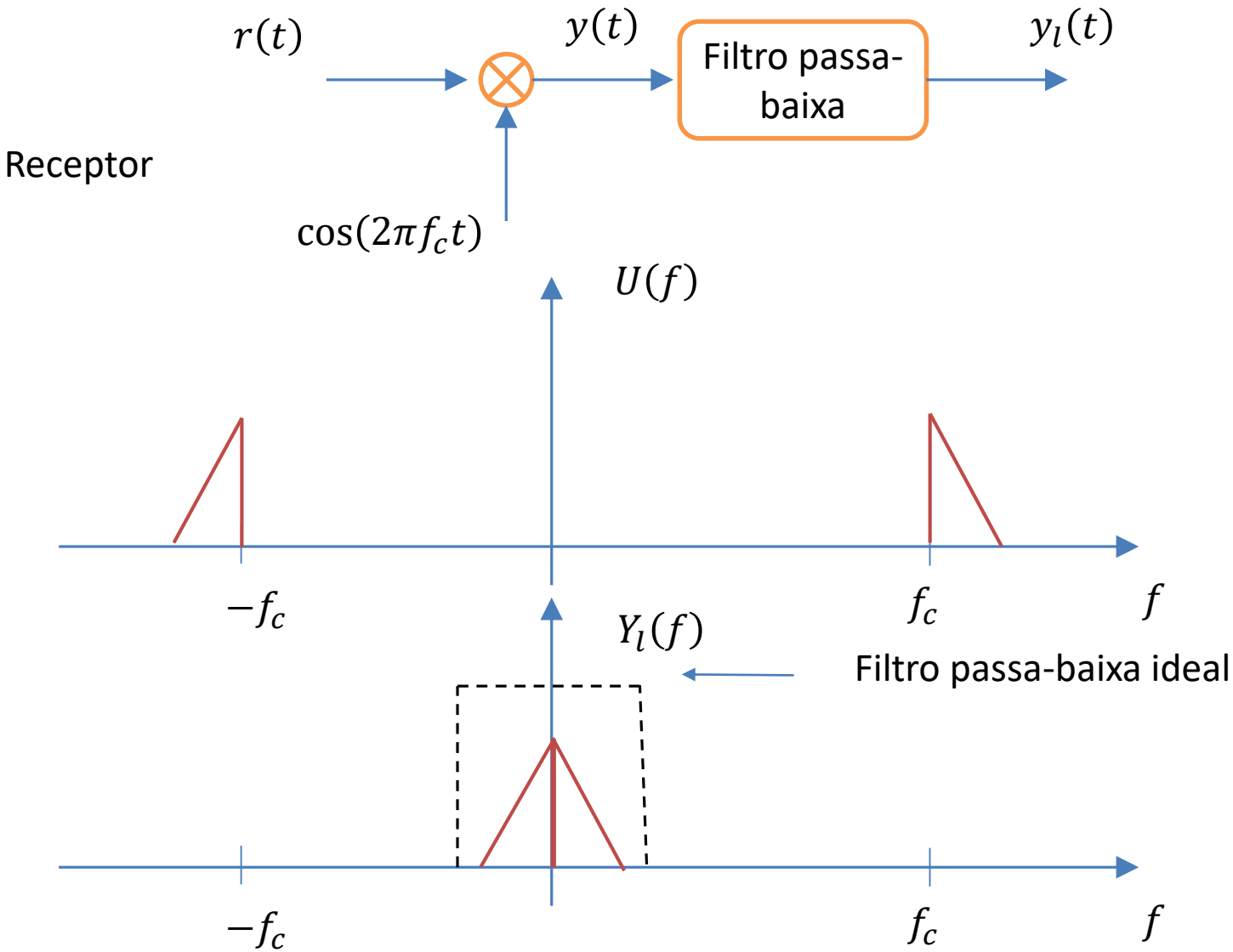
- Com isso, elimina-se os componentes com frequências acima de W Hz e a saída do filtro passa-baixa ideal é dada por

$$y_l(t) = \frac{1}{2}A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2}A_c \widehat{m}\,(t)\,\mathrm{sen}(\phi) \quad ,$$

que indica que a potência do sinal demodulado é reduzida devido aos termos $cos(\phi)$ e $sen(\phi)$.

- O descasamento de fase ϕ resulta também em um sinal de faixa lateral indesejado devido a $\widehat{m}\,(t)$.

Ilustração do procedimento de demodulação SSB-AM



Demodulação de sinais SSB AM em presença de ruído

- Considere a demodulação de um sinal SSB AM $u(t)$ em um canal sem distorção em presença de ruído. O sinal recebido é descrito por

$$
\begin{aligned}
r(t) &= u(t) + n(t) \\
&= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \pm A_c \widehat{m}\,(t)\, sen(2\pi f_c t) + n(t) \\
&= \left(A_c m(t) + n_c(t)\right)\cos(2\pi f_c t) + \left(\pm A_c \widehat{m}\,(t) - n_{s(t)}\right) sen(2\pi f_c t)
\end{aligned}
$$

- O sinal demodulado através da multiplicação de uma portadora com uma fase ϕ é dado por

$$
\begin{aligned}
y_l(t) &= r(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) \\
&= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \phi) + n(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)
\end{aligned}
$$

- A componente em fase aplicada a um filtro passa-baixa resulta em

$$
y_l(t) = \frac{1}{2} A_c m(t)\cos(\phi) + \frac{1}{2} n_c(t)\cos(\phi)
$$

Potência de sinais SSB AM

- A potência na saída de sinais SSB AM é dada por

$$P_o = \frac{A_c^2}{4} P_m$$

em que P_m é a potência da mensagem.

- A potência do ruído é descrita por

$$P_{no} = \frac{1}{4} P_{n_c} = \frac{1}{4} P_n = \frac{1}{4} 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df$$

$$= \frac{1}{4} 2 \int_{f_c}^{f_c + W} \frac{N_0}{2} df = \frac{1}{4} \frac{N_0}{2} 2W = \frac{1}{4} W N_0$$

- Logo, a SNR para um sistema SSB AM é descrita por

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_o}{P_{n_o}} = \frac{A_c^2 P_m}{W N_0}$$

- Como no caso de sinais SSB AM tem-se

$$P_R = P_m = A_c^2 P_m$$

então

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{SSB} = \frac{P_R}{W N_0} = \frac{A_c^2 P_m}{W N_0} = \left(\frac{S}{N}\right)_{DSB}$$

o que mostra que a SNR de um sinal SSB AM é igual à SNR de um sinal DSB AM.

VSB AM

- O sinal VSB AM possui características intermediárias entre sinais DSB AM e SSB AM que são apropriados para transmissão de vídeo em TV.

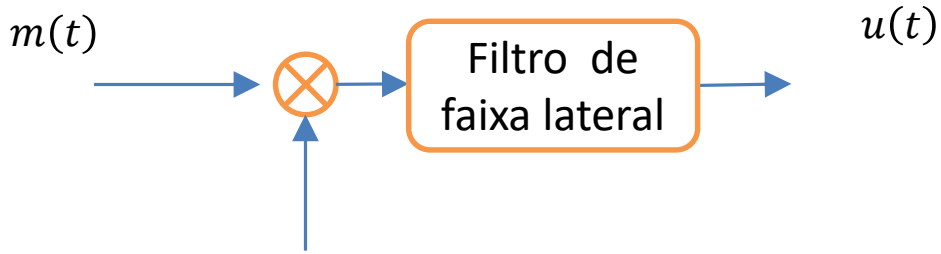
- O sinal VSB AM permite a simplificação do filtro aplicado às faixas laterais ao custo de um aumento modesto na largura de faixa.

- Um sinal VSB AM pode ser expresso por

$$u(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) * h(t),$$

em que $h(t)$ é a resposta ao impulso do filtro VSB.

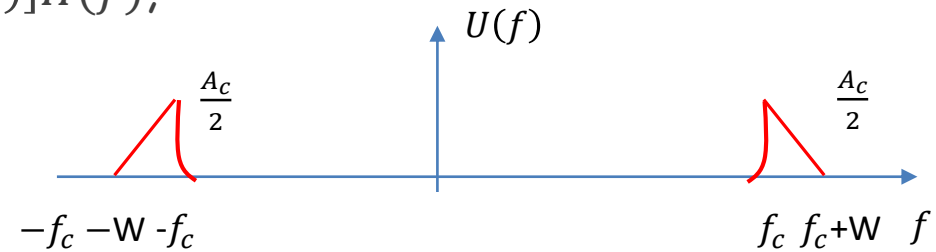
- O esquema de um modulador VSB AM é descrito abaixo.



$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

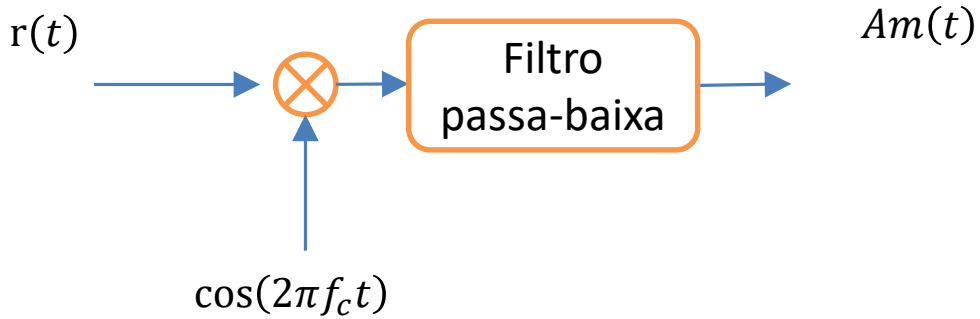
- No domínio da frequência, o sinal VSB AM é descrito por

$$U(f) = \Im\{u(t)\} = \Im\{A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) * h(t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]H(f),$$



Demodulação de sinais VSB AM

- Considere a demodulação de um sinal VSB AM de acordo com o diagrama abaixo.



- Supõe-se um canal sem distorção e sem ruído e um procedimento de demodulação que resulta em

$$y(t) = r(t)\cos(2\pi f_c t) = u(t)\cos(2\pi f_c t)$$

- No domínio da frequência, o sinal demodulado é descrito por

$$Y(f) = \frac{1}{2}[U(f - f_c) + U(f + f_c)]$$

- Substituindo-se $U(f)$ em $Y(f)$, obtém-se

$$Y(f) = \frac{A_c}{4}[M(f-2f_c)+M(f)]H(f-f_c)+\frac{A_c}{4}[M(f)+M(f+2f_c)]H(f+f_c)$$

- Aplicando-se $Y(f)$ a um filtro passa-baixa com $|f| \leq W$, obtém-se

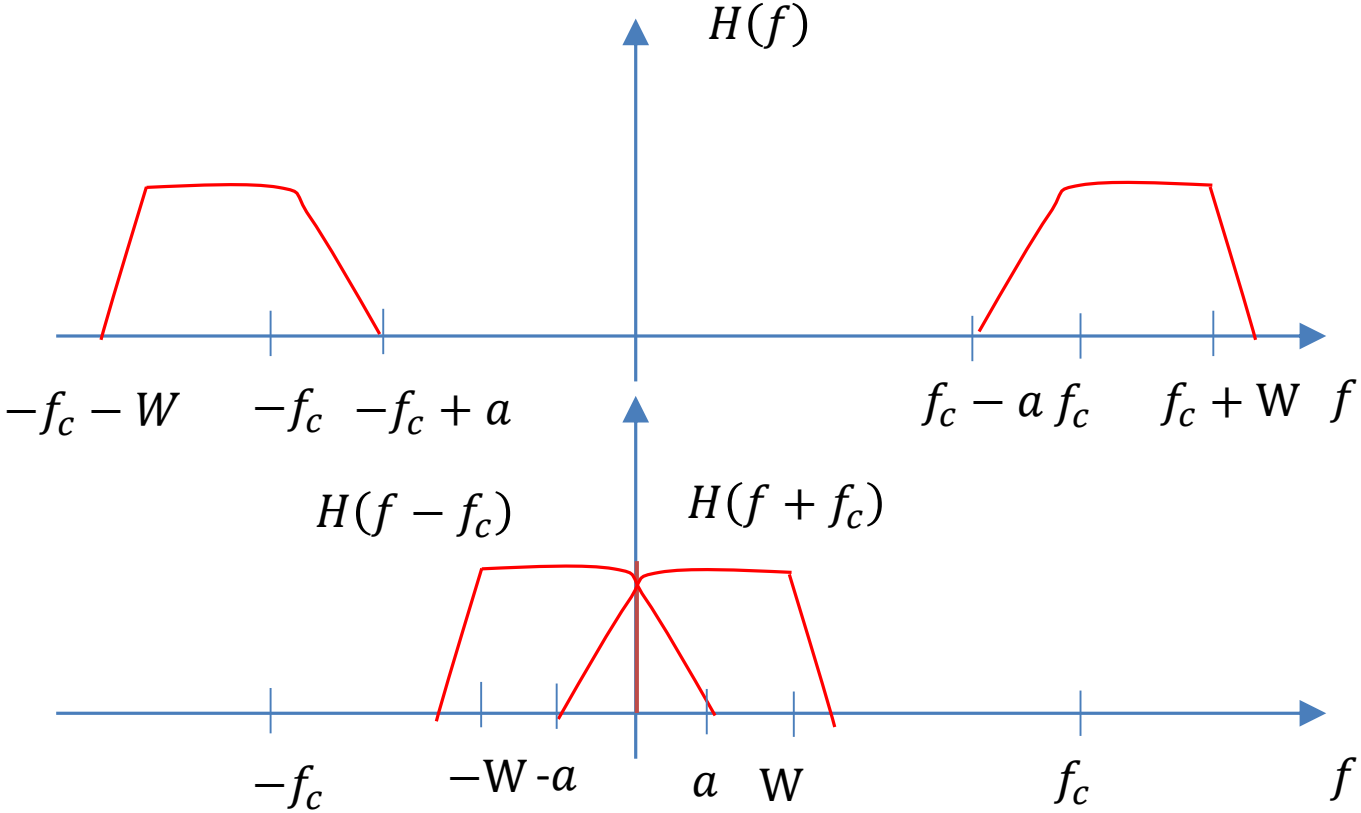
$$Y_l(f) = \frac{A_c}{4}M(f)(H(f-f_c)+H(f+f_c)\ )$$

- Para garantir que a mensagem seja recebida sem distorção é necessário que

$$H(f-f_c)+H(f+f_c) = \text{constante}, \qquad |f| \leq W$$

- Os filtros anteriormente mencionados devem ter fase linear na faixa passante descrita por

$$f_c - f_a \leq |f| \leq f_c + W$$



Exemplo 7

Considere o sinal de mensagem descrito por

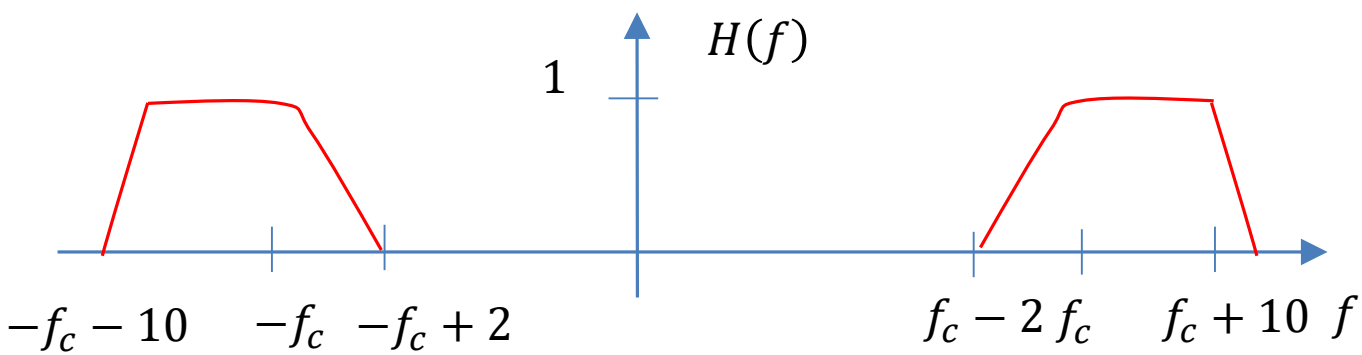
$$m(t) = 10 + 4\cos(2\pi t) + 8\cos(4\pi t) + 10\cos(20\pi t)$$

Especifique as características da resposta em frequência de um filtro VSB AM que deixa passar a faixa lateral superior e a primeira componente de frequência da faixa lateral inferior.

Solução:

O espectro do sinal $u'(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$ é descrito por

$$U'(f) = \Im\{u'(t)\} = \Im\{m(t)\cos(2\pi f_c t)\}$$
$$= 5[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + 2[\delta(f - f_c - 1) + \delta(f + f_c + 1)]$$
$$+4[\delta(f - f_c - 2) + \delta(f + f_c + 2)] + 5[\delta(f - f_c - 10) + \delta(f + f_c + 10)]$$



O filtro VSB é projetado para ter ganho 1 em $f_c - 2 \leq |f| \leq f_c + 10$, ganho de $\frac{1}{2}$ em $f - f_c$, ganho de $½ + \alpha$ em $f = f_c + 1$ e ganho de $½ - \alpha$ em $f = f_c - 1$.

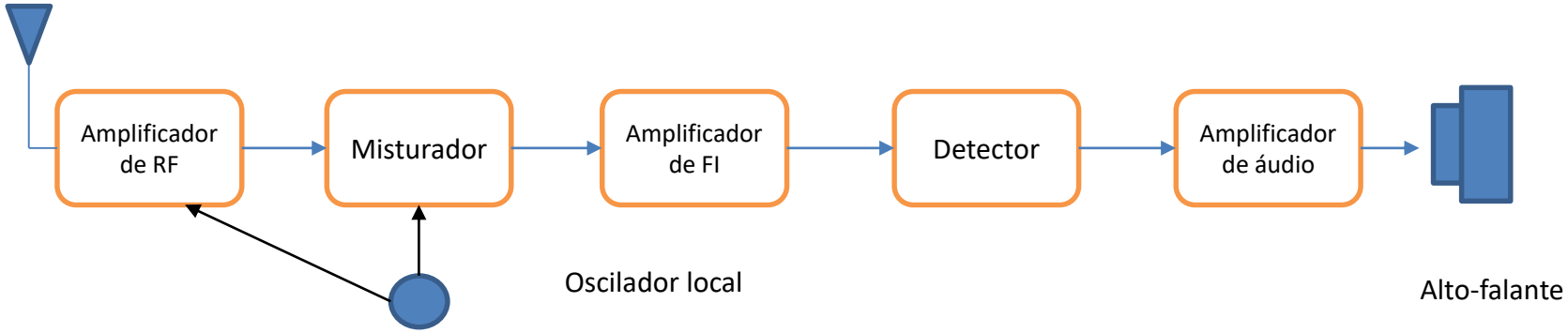
C. Aplicações de modulação AM

- Rádio AM se tornou uma forma muito popular de comunicação analógica.
- Em particular, serviços comerciais de rádio difusão AM usam a faixa de 535-1605 kHz para transmissão de voz e música.
- As alocações das frequências das portadoras se situam em 540-1600 kHz com 10kHz de espaçamento.
- Estações de radio AM usam sinais AM convencionais para transmissão, em que a mensagem $m(t)$ tem uma largura de faixa de aproximadamente 5 kHz.
- Como existem bilhões de receptores e relativamente poucos transmissores, o uso de AM convencional é justificado devido ao baixo custo dos receptores.

- O receptor AM mais usado é o receptor super-heterodino, inventado pelo engenheiro norte-americano Edwin Armstrong na 1a. Guerra Mundial.

- Esse receptor consiste em um amplificador sintonizado de radio-frequência (RF), um misturador, um oscilador local, um amplificador de frequência intermediária (FI), um detector de envoltória, um amplificador de áudio e um alto-falante.

- A sintonização é feita por um capacitor variável, que ajusta simultaneamente o amplificador de RF e a frequência do oscilador local.



- No receptor super-heteródino AM, o sinal AM é convertido a uma FI $f_{IF} = 455$kHz, o que permite amplificação de sinais vindos de qualquer estação AM.

- O amplificador FI é projetado para uma largura de faixa de 10kHz, o que corresponde à largura de faixa do sinal transmitido.

- A conversão de frequência para FI é realizada através da combinação do amplificador RF e do misturador. A frequência do oscilador local é

$$f_{LO} = f_c + f_{IF}$$

- Misturando-se o amplificador de RF à frequência f_c obtém-se:
  - Um sinal centrado em f_{IF}, que é admitido pelo amplificador FI.
  - Um sinal centrado em $2f_c + f_{IF}$, que é eliminado.

- A frequência do oscilador fica na faixa 995-2055 kHz.

- No receptor de RF, obtém-se os sinais das estações de rádio.

- Limitando-se a largura de faixa do amplificador de RF a $B_C < B_{RF} < 2f_{IF}$, em que $B_C = 10$kHz, rejeita-se os sinais indesejados e obtém-se

$$r_1(t) = A_c[1 + m_1(t)]\cos(2\pi f_c t)$$
$$r_2(t) = A_c[1 + m_2(t)]\cos(2\pi f'_c t),$$

em que $f_c = f_{LO} - f_{IF}$ e $f'_c = f_{LO} + f_{IF}$.

- No receptor, o amplificador de RF é usado para rejeitar o sinal $r_2(t)$ enquanto o sinal $r_1(t)$ é demodulado e a mensagem $m_1(t)$ é recuperada.

D. Modulação em ângulo

- A modulação em ângulo é uma classe de métodos de modulação, que inclui modulação em frequência (FM) e modulação em fase (PM).

- Em sistemas FM, a frequência da portadora f_c é alterada pelos sinais de mensagem.

- Em sistemas PM, a fase da portadora f_c é alterada de acordo com as variações dos sinais de mensagem.

- Ambos FM e PM são não lineares e expandem a largura de faixa tal que a faixa efetiva do sinal modulado é muitas vezes a faixa da mensagem.

- Além disso, FM e PM requerem uma complexidade computacional superior e têm maior imunidade ao ruído do que AM .

- Em particular, para uma dada mensagem, FM produz transições menos abruptas do que PM, tem menor largura de faixa e é preferida a PM.

- A maior qualidade e resistência a ruído motivou a adoção de FM para difusão de música de alta qualidade.

Representação de sinais FM e PM

- Um sinal modulado em ângulo pode ser escrito como

$$u(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)),$$

em que f_c é a frequência da portadora e $\phi(t)$ é a fase variante no tempo.

- A frequência instantânea deste sinal é dada por

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t)$$

- Em um sistema PM, se $m(t)$ é a mensagem então a fase é proporcional à mensagem, ou seja,

$$\phi(t) = k_p m(t),$$

em que k_p é a constante de desvio de fase.

- Em um sistema FM, o desvio instantâneo de frequência é proporcional à mensagem $m(t)$, isto é,

$$f_i(t) - f_c = k_f m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t),$$

ou, de forma equivalente,

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau,$$

em que k_f é uma constante de desvio de frequência.

- Das relações anteriores, tem-se

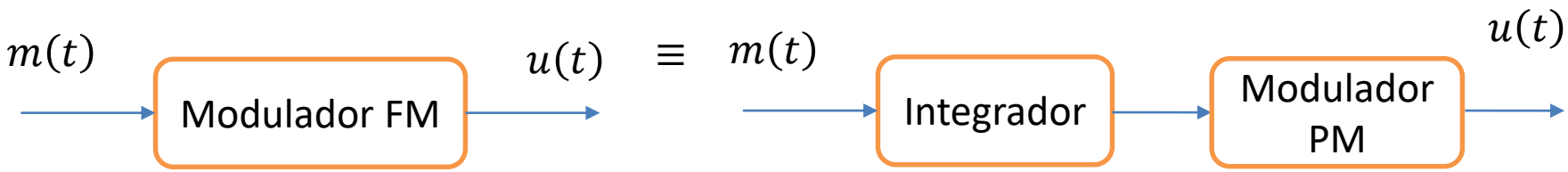
$$\phi(t) = \begin{cases} k_p m(t), & \text{para PM} \\ 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau, & \text{para FM} \end{cases},$$

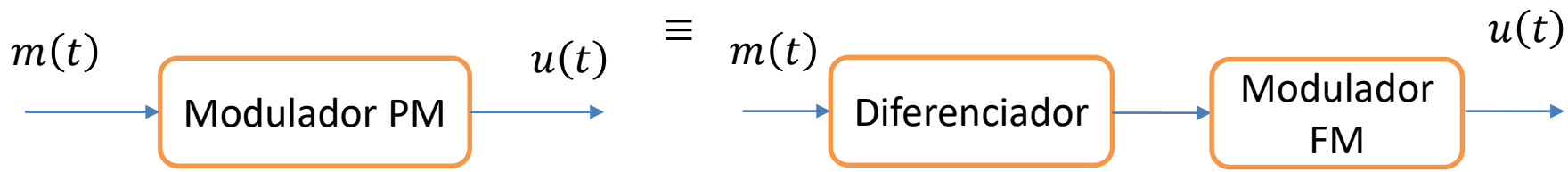
- Além disso, se uma portadora é modulada em fase com uma integral da mensagem isto é equivalente a modulação em frequência da mensagem:

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \begin{cases} k_p \frac{d}{dt} m(t), & \text{para PM} \\ 2\pi k_f m(t) & \text{para FM} \end{cases},$$

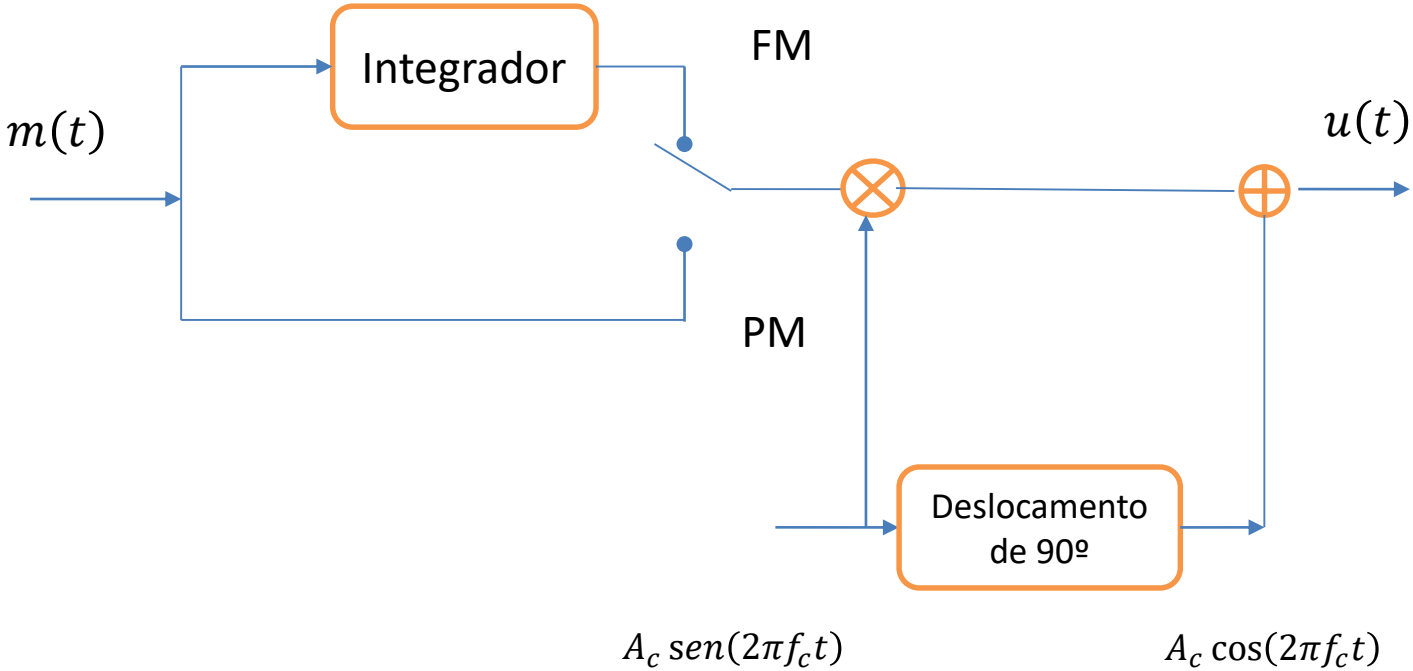
que mostra que se modularmos em frequência a portadora com $\frac{d}{dt} m(t)$ o resultado é equivalente à modulação em fase com $m(t)$.

Esquemas de modulação em ângulo

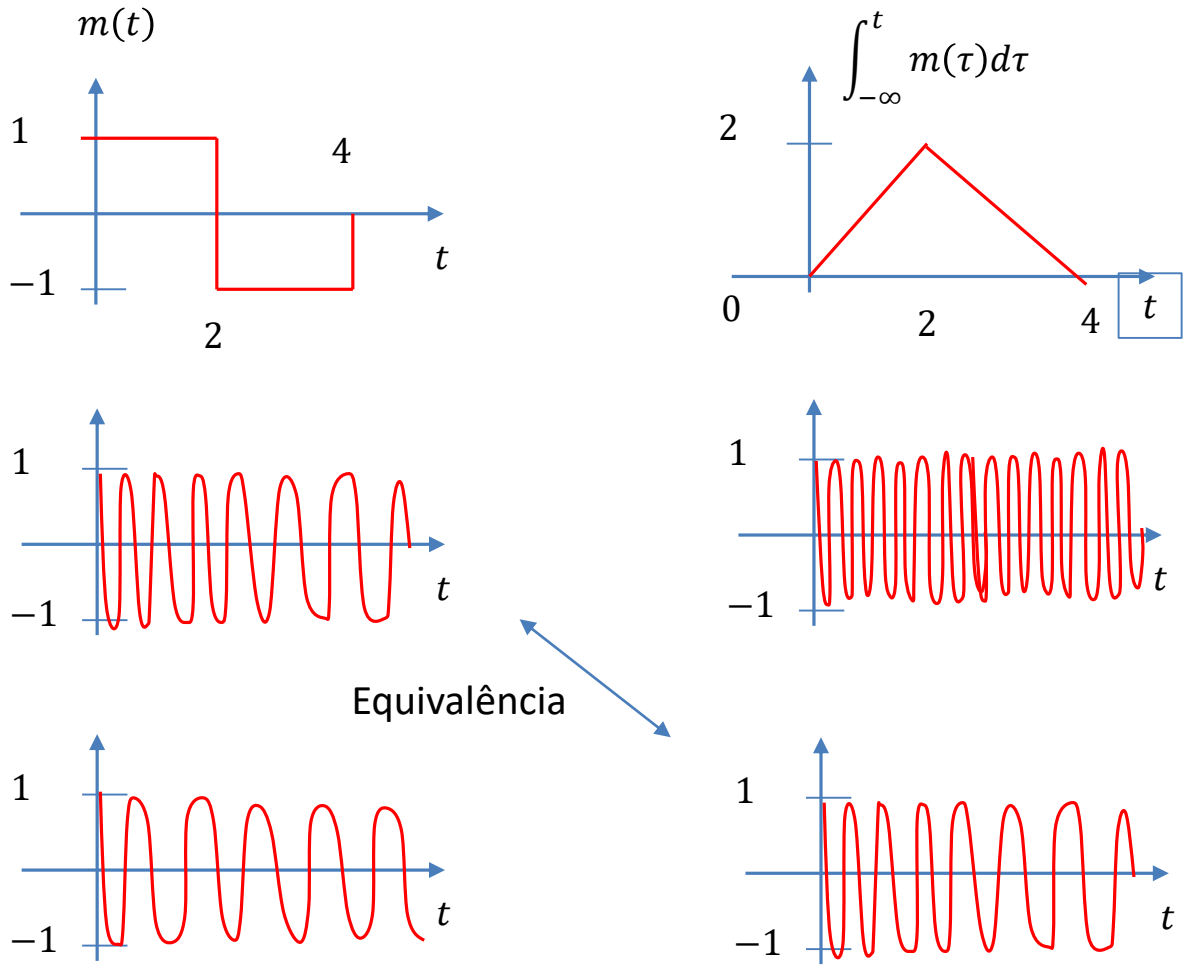




- A geração de sinais de modulação em ângulo com faixa estreita usa esquemas do tipo ilustrado abaixo.



Comparação de formas de onda PM e FM



Exemplo 8

O sinal de mensagem $m(t) = \mathrm{a}\cos(2\pi f_m t)$ é usado para modular em frequência ou fase a portadora descrita por

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

Determine os sinais modulados em FM e PM

Em sistemas PM, tem-se

$$\phi(t) = k_p m(t) = k_p \, \mathrm{a} \cos(2\pi f_m t)$$

Logo, o sinal modulado é descrito por

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= A_c \cos\Big(2\pi f_c t + k_p m(t)\Big) \\ &= A_c \cos\big(2\pi f_c t + k_p \, \mathrm{a} \cos(2\pi f_m t)\big) \end{aligned}$$

Definindo-se $\beta_p = k_p a$ o índice de modulação PM, tem-se

$$u(t) = A_c \cos\big(2\pi f_c t + \beta_p \cos(2\pi f_m t)\big)$$

Em sistemas FM, tem-se

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau = \frac{k_f a}{f_m}\operatorname{sen}(2\pi f_m t)$$

Logo, o sinal modulado é descrito por

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right) \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{k_f a}{f_m}\operatorname{sen}(2\pi f_m t)\right) \end{aligned}$$

Definindo-se $\beta_f = \frac{k_f a}{f_m}$ o índice de modulação FM, tem-se

$$u(t) = A_c \cos\big(2\pi f_c t + \beta_f \operatorname{sen}(2\pi f_m t)\big)$$

Demodulação de sinais modulados em ângulo

- A demodulação de um sinal FM envolve a determinação da frequência instantânea do sinal modulado e a subtração da frequência da portadora.

- O desvio máximo de frequência em um sistema FM é descrito por

$$\Delta f_{max} = k_f \max[|m(t)|]$$

- Pode-se estender a definição de índice de modulação para um sinal arbitrário $m(t)$ como

$$\beta_f = k_f \max \frac{[|m(t)|]}{W} = \frac{\Delta f_{max}}{W},$$

em que W é a largura de faixa da mensagem $m(\mathrm{t})$.

- A demodulação de um sinal PM envolve a determinação da fase instantânea do sinal modulado e a subtração da frequência da portadora.

- O desvio máximo de fase em um sistema PM é descrito por

$$\Delta\phi_{max} = k_p \max[|m(t)|]$$

- Pode-se estender a definição de índice de modulação para um sinal arbitrário $m(t)$ como

$$\beta_p = k_p \max \frac{[|m(t)|]}{W} = \frac{\Delta\phi_{max}}{W},$$

em que W é a largura de faixa da mensagem $m(\mathrm{t})$.

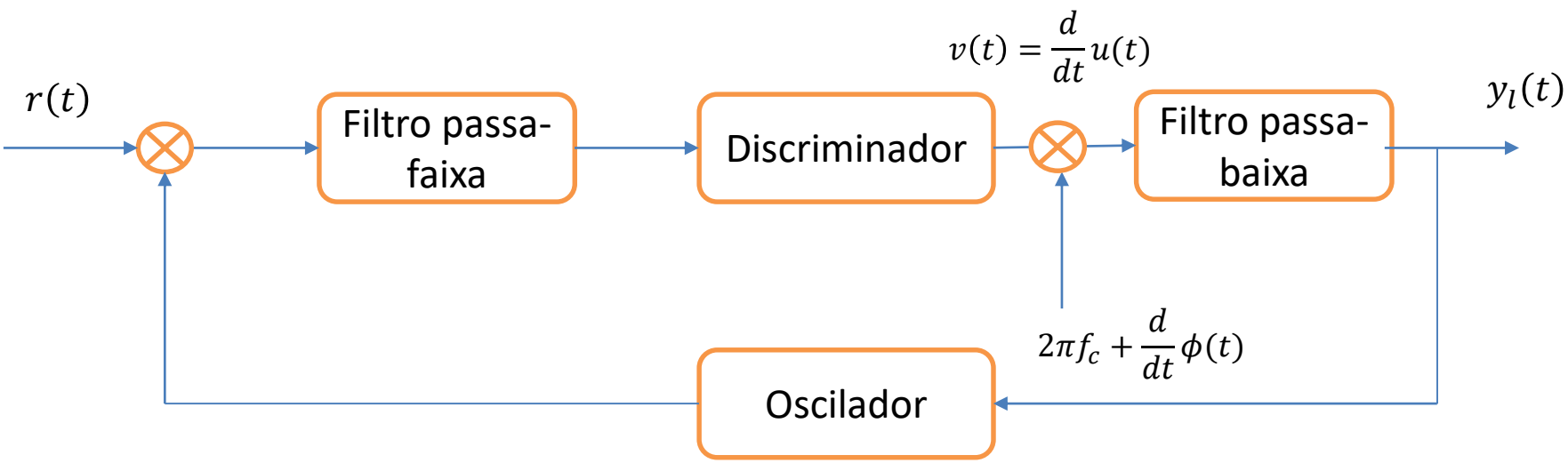
- No desenvolvimento a seguir, a demodulação de sinais FM que converte as variações de frequência em uma mensagem é estudada.

- O demodulador FM produz a derivada da fase do sinal recebido com relação ao tempo, que na ausência de rúido e distorção, é descrito por

$$
\begin{aligned}
r(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\
&= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau\right)
\end{aligned}
$$

- Apesar de o sinal FM ideal não exibir flutuações de amplitude, a presença de distorções de canal e ruído é capaz de introduzi-las.

- Em um esquema de demodulação FM, emprega-se um circuito discriminador, filtros e um detector de envoltória.

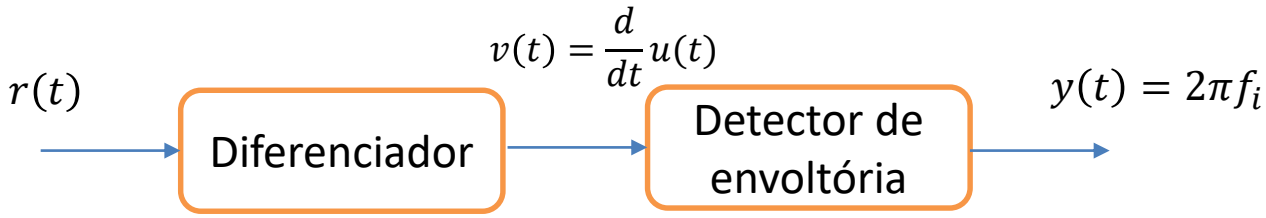


- A envoltória de $v(t)$ é dada por

$$2\pi A_c(f_c + k_f m(t)) = A_c(2\pi f_c + \frac{d}{dt}\phi(t))$$

- A partir da envoltória obtém-se a mensagem $m(t)$.

- O discriminador consiste em um diferenciador e um detector de envoltória.



- O processamento realizado pelo discriminador inclui a diferenciação

$$v(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}(A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)))$$
$$= -A_c\left(2\pi f_c + \frac{d}{dt}\phi(t)\right) sen(2\pi f_c t + \phi(t))$$

- O detector de envoltória obtém a envoltória

$$A_c\left(2\pi f_c + \frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$

- A saída do detector de envoltória é descrita por

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{D}\{v(t)\} &= 2\pi f_i \\
&= 2\pi(f_c + k_f m(t)) \\
&= 2\pi f_c + 2\pi k_f m(t)
\end{aligned}
$$

- Removendo-se os componentes indesejáveis com um filtro passa-baixa e um fator de escala, tem-se

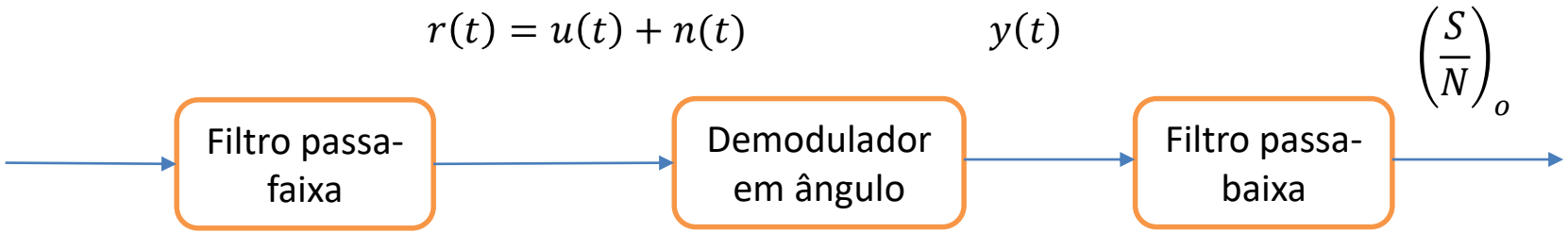
$$y_l(t) = k_f m(t)$$

Demodulação de sinais modulados em ângulo com ruído

- Na demodulação de sinais modulados em ângulo em presença de ruído, considera-se o sinal recebido dado por

$$
\begin{aligned}
r(t) &= u(t) + n(t) \\
&= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) + n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t) sen(2\pi f_c t),
\end{aligned}
$$

em que $n(t)$ é o ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN) presente no demodulador, ilustrado abaixo, para sinais modulados em ângulo.



- O ruído passa-faixa na demodulação pode ser representado por

$$n(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}\cos\left(2\pi f_c t + arc\tan\frac{n_s(t)}{n_c(t)}\right)$$
$$= V_n(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_n(t)),$$

em que $V_n(t)$ e $\phi_n(t)$ são a amplitude e a fase de $n(t)$.

- O sinal recebido pode então ser expresso por

$$r(t) = u(t) + V_n(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_n(t))$$
$$= A_c\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) + V_n(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_n(t))$$
$$= (A_c + V_n(t))\cos(\phi_n(t) - \phi(t))\cos\left(2\pi f_c t + \phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))\right)$$

- O demodulador processa o sinal recebido $r(t)$ e no caso de PM produz

$$y(t) = \phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))$$
$$= k_p m(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))$$

- Alternativamente, pode-se escrever a saída do demodulador como

$$y(t) = k_p m(t) + Y_n(t),$$

em que $\mathrm{Y_n(t)} = \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))$ e o primeiro termo contém a mensagem desejada.

- É interessante notar que o componente do ruído é inversamente proporcional à amplitude A_c.

- O demodulador processa o sinal recebido $r(t)$ e no caso de FM produz

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(\phi(t) + \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\phi(t) + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t)) \\
&= k_f m(t) + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))
\end{aligned}
$$

- Alternativamente, pode-se escrever a saída do demodulador como

$$
y(t) = k_f m(t) + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt} Y_n(t),
$$

em que $\mathrm{Y_n(t)} = \frac{V_n(t)}{A_c} sen(\phi_n(t) - \phi(t))$ e o primeiro termo contém a mensagem desejada.

Características espectrais de sinais modulados em ângulo

- Considere um sinal de mensagem senoidal, que resulte em um sinal modulado em FM ou PM da forma

$$u(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + \beta \underbrace{sen 2\pi f_m t}_{m(t)}\right),$$

em que β é o índice de modulação (β_{f} ou β_p).

- Usando-se a fórmula de Euler, tem-se o sinal modulado na forma

$$u(t) = Re\left\{A_c e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta sen 2\pi f_m t}\right\}.$$

- Expandindo-se a expressão acima em uma representação em série de Fourier, obtém-se a função de Bessel de ordem n

$$c_n = f_m \int_0^{\frac{1}{f_m}} e^{j\beta sen 2\pi f_m t} e^{-j2\pi f_m n t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(\beta sen\,(u) - nu))} du$$

- Logo, pode-se escrever

$$e^{j\beta sen 2\pi f_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t}$$

- Substituindo-se a expressão acima em $u(t)$, tem-se

$$u(t) = Re\left\{A_c e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c\, J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t)$$

- A expansão acima mostra que o sinal modulado contém todas as frequências da forma $f_c + n f_m,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

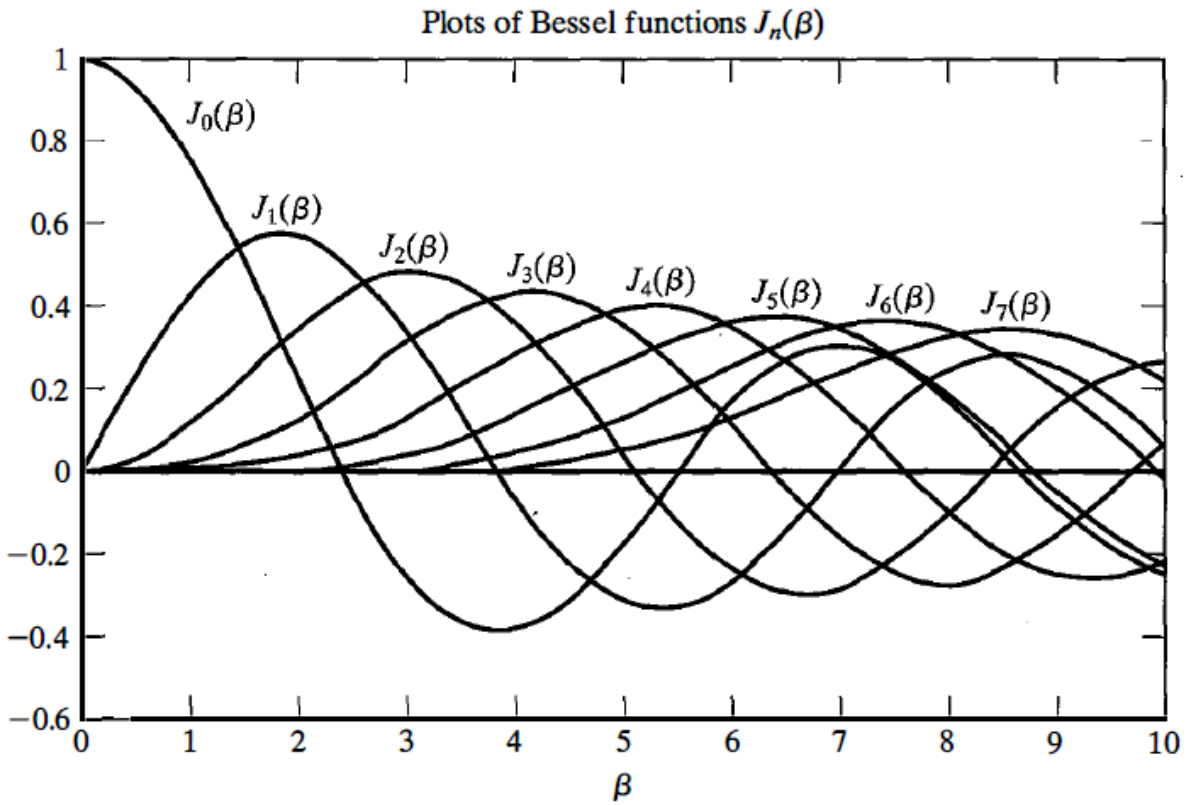
- Como as amplitudes das componentes das frequências da forma $f_c + nf_m$ são pequenas para n grande, pode-se definir a largura de faixa efetiva.

- Para β pequeno tem-se a aproximação

$$J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}$$

- Isto permite a seleção de um número de harmônicos que correspondem a um percentual da potência do sinal FM.

- Uma figura com funções de Bessel para diferentes n é mostrada abaixo.



- Uma tabela com o número de harmônicos β requeridos para atingir um percentual da potência do sinal é mostrada abaixo.

TABLE 4.1 REQUIRED NUMBER OF HARMONICS IN FM

Power (%)	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 5$	$\beta = 8$	$\beta = 10$	$\beta = 15$
80	—	1	2	4	7	9	14
90	1	1	2	5	8	10	15
98	1	2	3	6	9	11	16

Exemplo 9

Considere a portadora $c(t) = 10\cos(2\pi f_c t)$ e o sinal de mensagem $m(t) = \cos(20\pi t)$.

Suponha que a mensagem e a portadora sejam usadas para gerar um sinal FM com $k_f = 50$.

Determine a expressão para o sinal modulado e quantos harmônicos seriam necessários para conter 99% da potência do sinal.

Solução:

A potência da portadora do sinal é dada por

$$P_c = \frac{A_c^2}{2} = 50$$

O sinal modulado é descrito por

$$\begin{aligned} u(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} \cos(20\pi\tau)\, d\tau\right) \\ &= 10 \cos\left(2\pi f_c t + \frac{50}{10} \operatorname{sen}(20\pi t)\right) \\ &= 10 \cos(2\pi f_c t + 5 \operatorname{sen}(20\pi t)) \end{aligned}$$

O índice de modulação é dado por

$$\beta = k_f \max \frac{[|m(t)|]}{f_m} = 5$$

O sinal modulado FM pode ser expresso por

$$u(t) = Re\left\{A_c e^{j2\pi f_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t}\right\}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + n f_m)t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 10 J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + 10n)t)$$

Para garantir que 99% da potência do sinal esteja na largura de faixa efetiva com $\beta = 5$, escolhe-se k tal que

$$\sum_{n=-k}^{n=k} 100 \frac{J_n^2(\beta = 5)}{2} \geq 0{,}99 \times 50$$

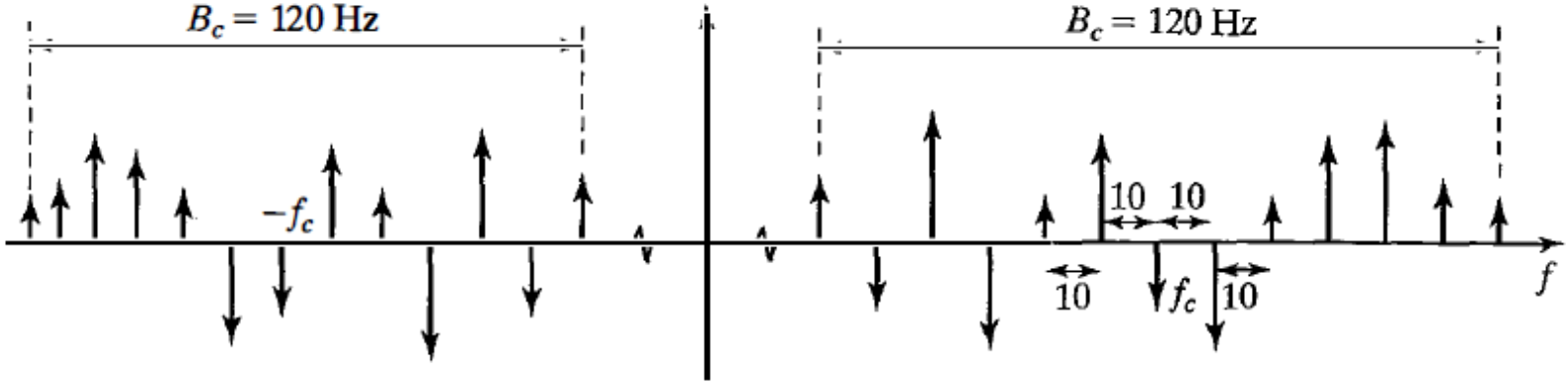
A solução para a desigualdade acima é $k = 6$.

Isso mostra que usando frequências

$$f_c \pm 10k, \qquad k = 0, \dots, 6$$

garante-se que 99% da potência do sinal esteja incluída.

Os harmônicos presentes estão ilustrados abaixo.



Regra de Carson

- Em geral, a largura de faixa efetiva de um sinal modulado em ângulo, que contém ao menos 98% da potência do sinal, é descrita por

$$B_c = 2(\beta + 1)f_m,$$

em que β é o índice de modulação e f_m é a frequência da mensagem senoidal.

- Considere um sinal de mensagem dado por

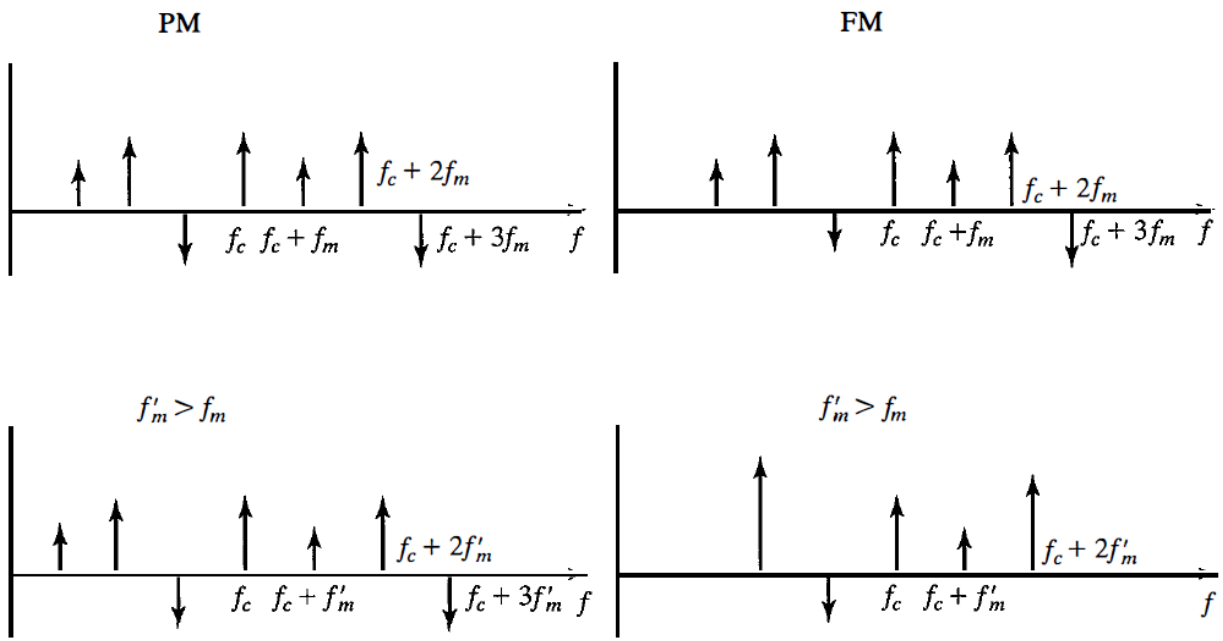
$$m(t) = \mathrm{acos}(2\pi f_m t)$$

- Usando a regra acima e os resultados do exemplo anterior, tem-se

$$B_c = 2(\beta + 1)f_m = \begin{cases} 2\left(k_p a + 1\right)f_m, & PM \\ 2\left(\dfrac{k_f a}{f_m} + 1\right)f_m, & FM \end{cases}$$

- A relação anterior mostra que ao aumentarmos a em PM e FM, provoca-se o mesmo efeito que o aumento da largura de faixa B_c.

- Por outro lado, um aumento de f_m também aumenta a largura de faixa do sinal, sobretudo para um sinal PM, conforme ilustrado abaixo.



- As características espectrais de um sinal modulado em ângulo para um mensagem $m(t)$ geral são difíceis de expressar.

- Entretanto, há uma relação aproximada entre a largura de faixa efetiva e a largura de faixa de $m(t)$ conhecida como regra de Carson e dada por

$$B_c = 2(\beta + 1)W,$$

em que o índice de modulação é dado por

$$\beta = \begin{cases} k_p \max|m(t)|, & \text{para PM} \\ k_f \max \dfrac{|m(t)|}{W}, & \text{para FM} \end{cases}$$

Exemplo 10

Suponha que uma mensagem seja descrita por $m(t) = 10sinc(10^4 t)$, determine a largura de faixa de um sinal FM modulado com $k_f = 4000$.

Solução:

Para sinais FM, tem-se a regra de Carson

$$B_c = 2(\beta + 1)W$$

Para determinar W, é necessário encontrar o espectro de $m(t)$, o que pode ser calculado por

$$M(f) = \Im\{m(t)\} = 10^{-3} rect(10^{-4} f),$$

o que mostra que $m(t)$ tem uma largura de faixa de 5000Hz.

Como a amplitude máxima de $m(t)$ é 10, tem-se

$$\beta = k_f \max \frac{[|m(t)|]}{W} = 8$$

e

$$B_c = 2(\beta + 1)W = 90\ kHz$$

Cálculo de SNR

- Depois da demodulação, uma filtragem é aplicada para reduzir a largura de faixa do sinal a W.

- Logo, a densidade espectral de potência de $\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}Y_n(t)$ é descrita por

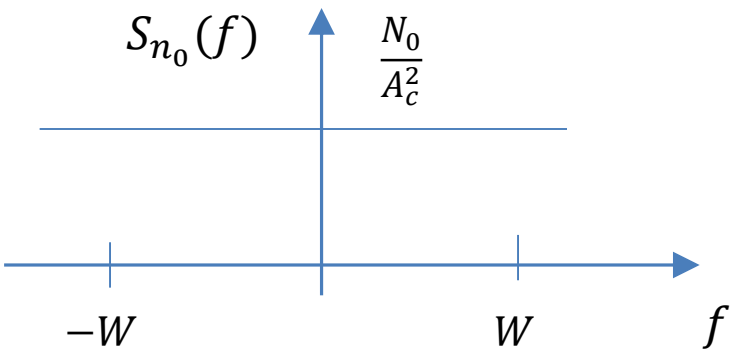
$$f^2 S_{Y_n}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{A_c^2} f^2, & |f| \leq \dfrac{B_c}{2} \quad (\text{para } FM) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Para ambos PM and FM, $\frac{B_c}{2}$ deve ser substituído por W para levar em conta a filtragem pós-demodulação.

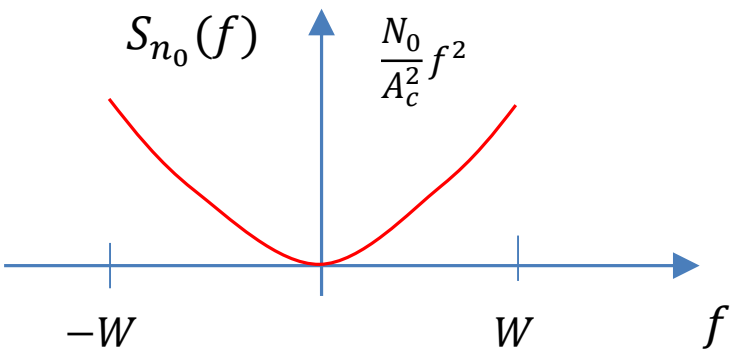
- Logo, para $|f| < W$ tem-se a densidade espectral de potência do ruído

$$S_{n_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{A_c^2}, & (\text{para PM}) \\ \dfrac{N_0}{A_c^2} f^2, & (\text{para FM}) \end{cases}$$

- A densidade espectral de potência do ruído pode ser ilustrada por



PM



FM

- A potência do ruído na saída do filtro passa-baixa do demodulador é dada por

$$P_{n_0} = \int_{-W}^{W} S_{n_0}(f)df = \begin{cases} \int_{-W}^{W} S_{n_0}(f)df \\ \int_{-W}^{W} S_{n_0}(f)df \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2WN_0}{A_c^2}, & \text{(para PM)} \\ \dfrac{2N_0W^3}{3A_c^2}, & \text{(para FM)} \end{cases}$$

- Com base na expressão anterior podemos calcular a potência do sinal para modulação em ângulo

$$P_{s_0} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u^2(t)dt = \begin{cases} k_p^2 P_m, & \text{para PM} \\ k_f^2 P_m, & \text{para FM} \end{cases}$$

- Desta forma, pode-se definir a SNR conforme

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = \begin{cases} k_p^2 \dfrac{A_c^2}{2} \dfrac{P_m}{N_0 W}, & \text{para PM} \\ \dfrac{3k_f^2 A_c^2}{2W^2} \dfrac{P_m}{N_0 W}, & \text{para FM} \end{cases}$$

- Usando $P_R = \frac{A_c^2}{2}$ como a potência do sinal recebido e $\begin{cases} \beta_p = k_p \max|m(t)|, & \text{para PM} \\ \beta_f = k_f \max\frac{|m(t)|}{W}, & \text{para FM} \end{cases}$ obtém-se

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = \begin{cases} P_R\left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_m}{N_0 W}, & \text{para PM} \\ 3P_R\left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \frac{P_m}{N_0 W}, & \text{para FM} \end{cases}$$

- Se considerarmos $\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_R}{N_0 W}$ como a SNR do sistema em banda básica, tem-se

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = \begin{cases} P_m\left(\frac{\beta_p}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para PM} \\ 3P_m\left(\frac{\beta_f}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para FM} \end{cases}$$

- Se usarmos $P_{M_n} = P_m \left(\frac{1}{\max|m(t)|}\right)^2$ como o conteúdo de potência da mensagem normalizada, pode-se escrever

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = \begin{cases} \beta_p^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para PM} \\ \beta_f^2 P_{M_n} \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para FM} \end{cases}$$

- Usando a regra de Carson $B_c = 2(\beta + 1)W$, pode-se expressar as expressões de SNR como função de $\Omega = \frac{B_c}{W}$ ou $\beta = \frac{\Omega}{2} - 1$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = \begin{cases} P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2} - 1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para PM} \\ 3P_M \left(\frac{\frac{\Omega}{2} - 1}{\max|m(t)|}\right)^2 \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{para FM} \end{cases}$$

Exemplo 11

Calcule a potência recebida necessária em um sistema FM com $\beta_f = 5$ sendo que $W = 15$ kHz e $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz.

A potência do sinal de mensagem normalizado é igual a $0{,}1$ Watts e a SNR requerida depois da demodulação é 60 dB.

Solução:

Usando-se a relação

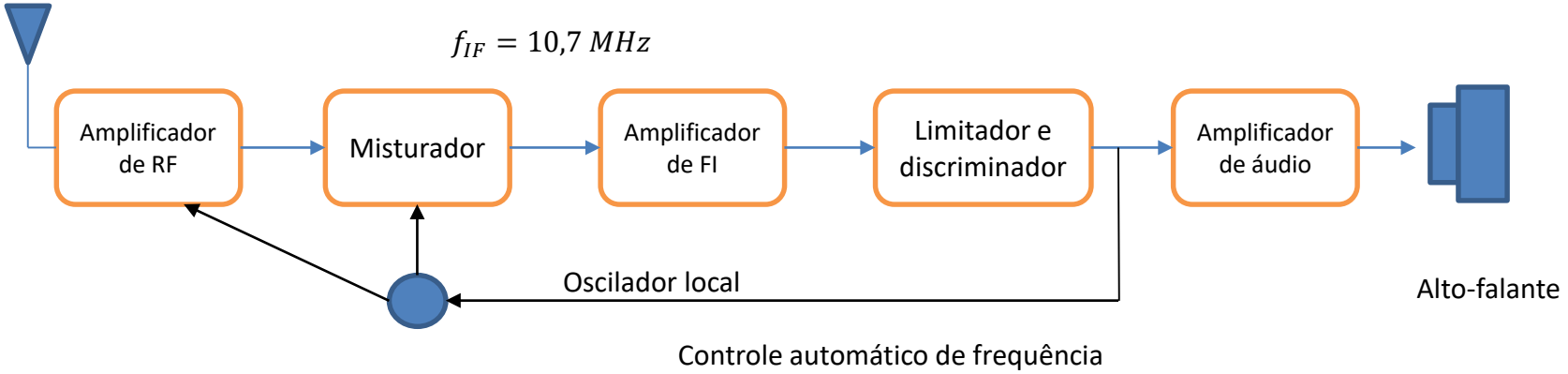
$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\mathrm{P_{s_0}}}{\mathrm{P_{n_0}}} = 3\beta_f^2 P_{M_n} \frac{P_R}{N_0 W} = 10^6$$

com $\beta_f = 5$ sendo que $W = 15$ kHz, $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz e $\mathrm{P_{M_n}} = 0{,}1$ Watts , obtém-se

$$P_R = 2 \times 10^{-5}$$

E. Aplicações de sistemas de modulação FM

- Sistemas de rádio FM: inventado por Edwin Armstrong em 1933, utiliza a faixa de frequências de 88-108 MHz para transmissão de voz e músicas.



- Separação das frequências de portadora: 200kHz

- Receptor super-heteródino: o misturador desloca todos os sinais de rádio FM para um largura de faixa comum de 200 kHz, centrada em $f_{IF} = 10{,}7\ MHz$

- Receptor usa um limitador de sinais e um discriminador de frequências para demodulação, seguido de um amplificador de áudio e filtros.