# Princípios de Comunicações

Prof. Rodrigo C. de Lamare
CETUC, DEE, PUC-Rio
delamare@puc-rio.br

# II. Sinais e sistemas, princípios de transmissão e filtragem

A. Conceitos básicos

B. Análise de Fourier

C. Transformada de Fourier, transmissão e filtragem

D. Potência e Energia

E. Transformada de Hilbert

F. Sinais passa-baixa e passa-faixa

# Introdução

- Neste capítulo, os conceitos de sinais e sistemas lineares são revisados e uma atenção especial é dedicada à transformada de Fourier.

- Em comunicações, os sinais são usados para transmitir informação através de canais de comunicação.

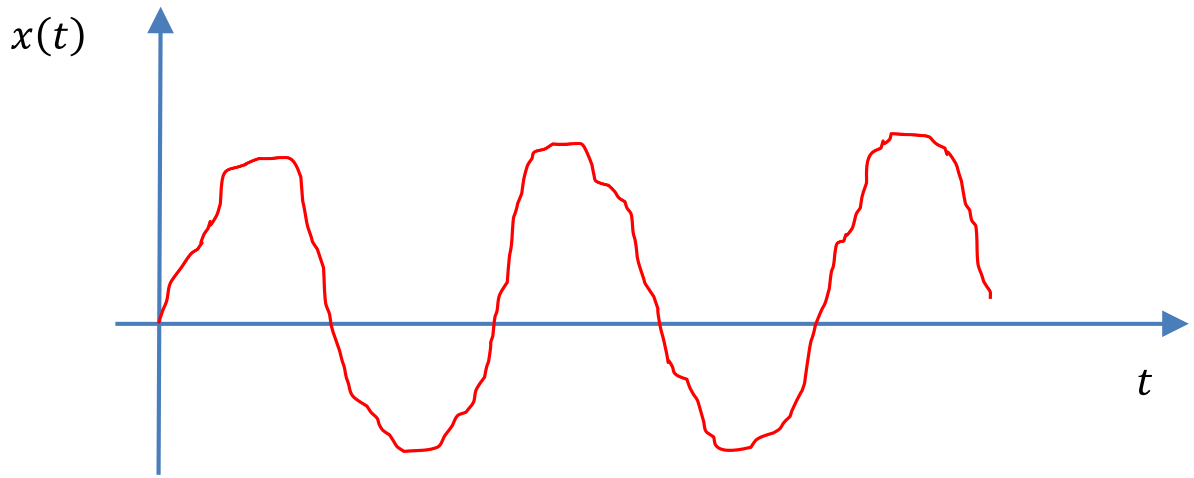
- Os canais de comunicação podem ser modelados como sistemas lineares e provocar distorções de amplitude e fase nos sinais.

- Além disso, os conceitos de potência e energia de sinais são revistos e discutidos.

- Finalmente, são caracterizados sinais do tipo passa-baixa e passa-faixa através de manipulações algébricas.

# A. Conceitos básicos

- Na nossa exposição, são considerados sinais que são funções no tempo e que podem ser matematicamente representados por $x(t)$.



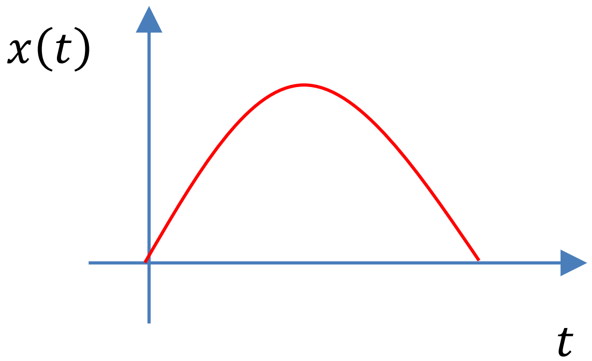

- Operações básicas em sinais envolvem deslocamento no tempo, reversão no tempo e escalonamento.

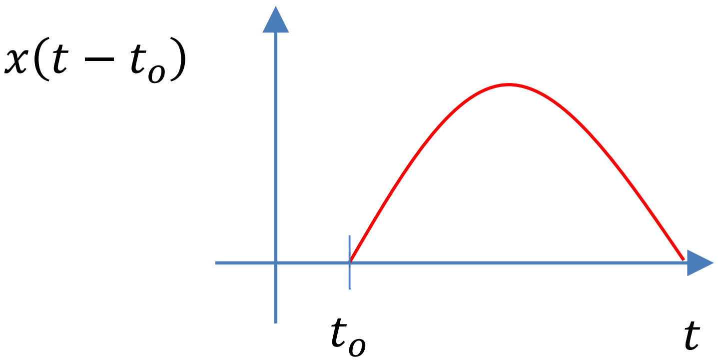
# Operações básicas

i) Deslocamento no tempo

$$x(t) \rightarrow x(t - t_o),$$

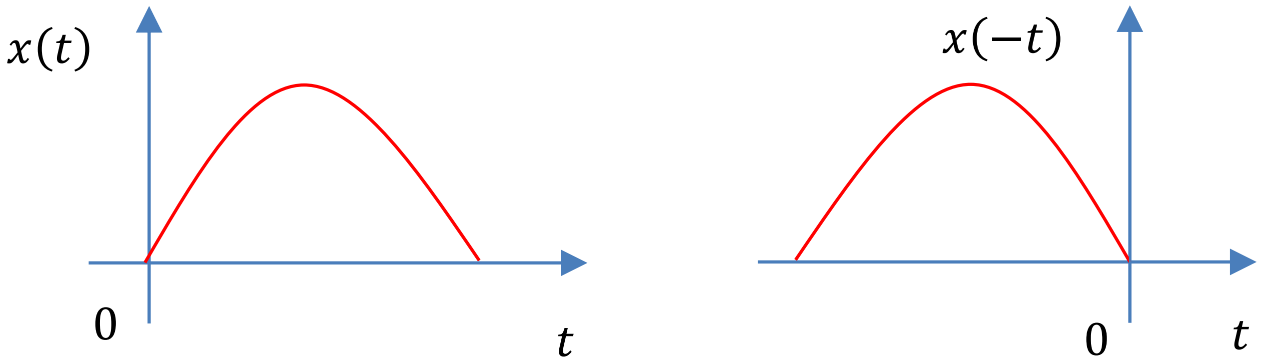
em que $t_o$ ($t_o > 0$) pode ser um retardo ou um avanço ($t_o < 0$).



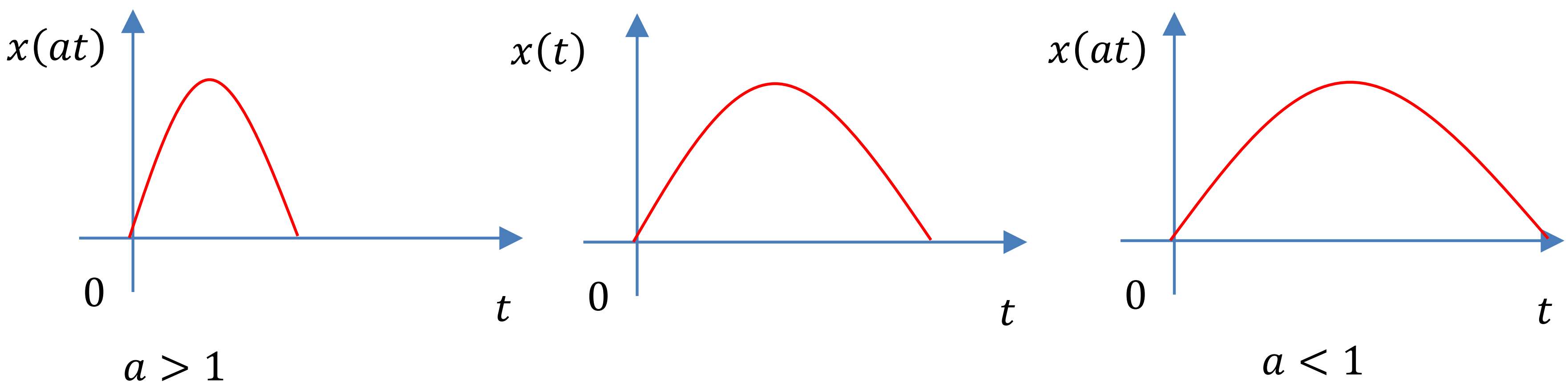
ii) Reversão no tempo

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$



iii) Escalonamento no tempo

$$x(t) \rightarrow x(at), \qquad a > 0$$



# Classificação de sinais

- Sinal contínuo no tempo vs sinal discreto no tempo:
  - Sinal contínuo: $x(t),\ t \in \mathbb{R}$
  - Sinal discreto: $x[n],\ n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Amostragem de um sinal contínuo no tempo $x(t)$ em um sinal discreto no tempo:

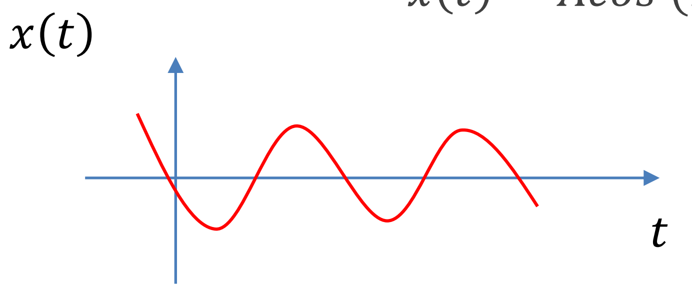
$$x[n] = x(t)\Big|_{t\,=\,nT_0} = x(nT_0),$$

em que $T_0$ é o período de amostragem.

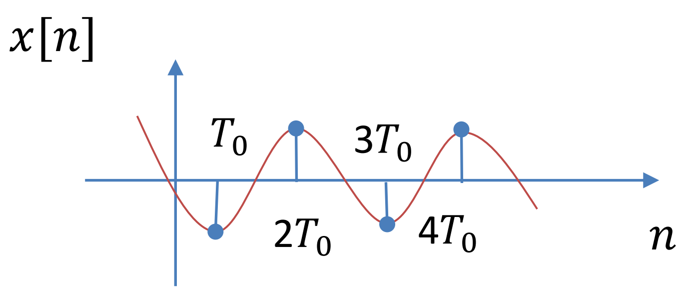
# Exemplo 1

Considere o sinal descrito por

$$x(t) = A\cos\,(2\pi f_0 t + \theta)$$




Mostre o sinal amostrado a uma taxa $T_0$



- Sinais podem ser funções reais ou complexas ao longo do tempo.

- Em comunicações, sinais complexos são muito usados para modelar sinais que carregam informação na fase e/ou na amplitude.

- Um sinal complexo pode ser descrito por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_R(t) + jx_I(t) \\ &= Ae^{j\theta}, \end{aligned}$$

em que $A = \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}$ é a amplitude e $\theta = \arg\{x(t)\} = \tan^{-1}\frac{Im\{x(t)\}}{Re\{x(t)\}}$ é a fase.

# Exemplo 2

Escreva o sinal $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}$ em função das partes imaginária e real e dos componentes de magnitude e fase.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)} \\
&= A\cos(2\pi f_0 t + \theta) + \mathrm{jA}\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \theta) \\
&= x_R(t) + jx_I(t) \\
&= \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}\, e^{j\,\arg\{x(t)\}}
\end{aligned}
$$

- Sinais podem também ser classificados como determinísticos ou aleatórios.

- Em sinais determinísticos, os valores de $x(t)$ são números reais ou complexos.

- Em sinais aleatórios, temos um processo estocástico.

- Nesse último caso, a cada instante de tempo $x(t)$ (ou $x[n]$) é uma variável aleatória descrita por uma função densidade de probabilidade.

- Além disso, os sinais podem ser classificados como sinais periódicos ou não periódicos.

- Um sinal periódico $x(t)$ satisfaz à propriedade

$$x(t + T_0) = x(t), \qquad \forall\, t,$$

em que $T_0$ é o período do sinal que assume valores reais e positivos.

- Para sinais discretos periódicos, tem-se

$$x[n + N_0] = x[n], \qquad \forall\, n,$$

em que $N_0$ é um inteiro positivo.

- Se o sinal não satisfaz as condições acima ele é não periódico.

# Exemplo 3

Considere o sinal $x[n] = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$ e verifique se ele é periódico.

Para o sinal $\mathrm{x}[n] = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$ ser periódico, é preciso que

$$2\pi f_0(n + N_0) + \theta = 2\pi f_0 n + \theta + 2\pi k, \qquad k \text{ inteiro}$$

o que resulta em

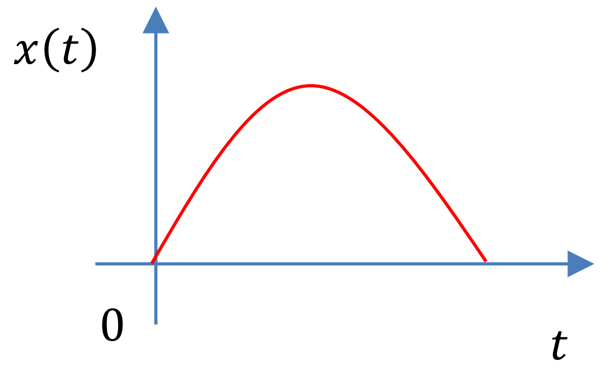
$$2\pi f_0 N_0 = 2\pi k \ \text{ e } f_0 = \frac{k}{N_0}$$

Logo, o sinal é periódico apenas para valores racionais de $f_0$.

- Sinais causais são também importantes pois o conceito de causalidade é fundamental para sistemas realizáveis.

- Um sinal é causal se

$$x(t) = 0, \qquad \text{for } t < 0$$

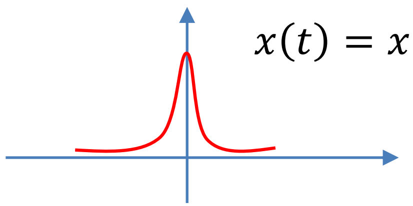



ou de forma equivalente,

$$x[n] = 0, \qquad \text{for } n < 0$$

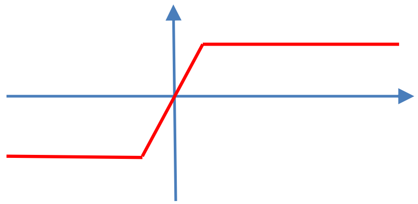
- Sinais também podem ser classificados como sinais pares e ímpares.

- Um sinal $x(t)$ é par se ele tem simetria com relação ao eixo vertical.



$$x(t) = x(-t)$$

- Um sinal $x(t)$ é ímpar se ele é antisimétrico com relação ao eixo vertical.



$$x(t) = -x(-t)$$

- Em geral, qualquer sinal pode ser escrito como a soma dos componentes par e ímpar

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t),$$

em que $x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ e $x_o(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$

# Exemplo 4

Decomponha o sinal $x(t) = Acos\ (2\pi f_0 t + \theta)$ em seus componentes par e ímpar.

Para $\theta = 0$ ou $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, tem-se

$$x(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\,cos\ (2\pi f_0 t) - \frac{A}{2}\mathrm{sen}(\theta)\,sen\ (2\pi f_0 t)$$

Como $cos\ (2\pi f_0 t)$ é par e $\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ é ímpar, obtém-se

$$x_e(t) = \frac{A}{2}\cos(\theta)\,cos\ (2\pi f_0 t)$$
$$x_o(t) = \frac{A}{2}\mathrm{sen}(\theta)\,sen\ (2\pi f_0 t)$$

- Para sinais complexos, uma outra forma de simetria chamada de simetria Hermitiana é comumente utilizada.

- Um sinal complexo $x(t)$ (ou $x[n]$) é chamado de Hermitiano se a parte real é par e a parte imaginária é ímpar.

- Por exemplo, o sinal $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ é Hermitiano.

# Sinais com energia ou potência

- Para qualquer sinal $x(t)$, a energia do sinal é dada por

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

- Para um sinal $x(t)$, a potência é descrita por

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt \,,$$

- Para sinais reais substitui-se $|x(t)|^2$ por $x^2(t)$.

- Diz-se que um sinal é do tipo energia se e somente se $\varepsilon_x$ é finito, enquanto um sinal do tipo potência satisfaz $0 < P_x < \infty$.

# Exemplo 5

Calcule a energia e a potência do sinal $x(t) = Acos\ (2\pi f_0 t + \theta)$

$$\varepsilon_x = \lim_{T \to \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\ cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\ dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\ cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A^2}{2} [1 + cos\ (4\pi f_0 t + 2\theta)\ ] dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \left[ \frac{A^2 T}{2T} + \left( \frac{A^2}{8\pi f_0 T} sen\ (4\pi f_0 t + 2\theta) \right) \right] \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{2} < \infty$$

Logo, o sinal é do tipo potência com $P_x = \frac{A^2}{2}$. Como ele é periódico a energia é infinita.

# Sinais importantes e propriedades

i) Sinais senoidais

$$x(t) = A cos\,(2\pi f_0 t + \theta),$$

em que $A$, $f_0$ e $\theta$ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente.

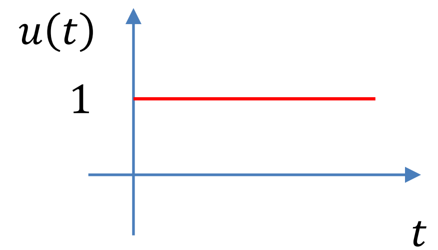
ii) Sinais exponenciais complexos

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \theta)},$$

em que $A$, $f_0$ e $\theta$ são a amplitude, a frequência e a fase, respectivamente.

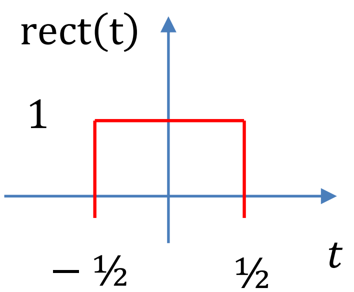
iii) O sinal degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



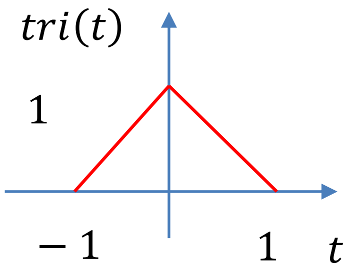

iv) O pulso retangular

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



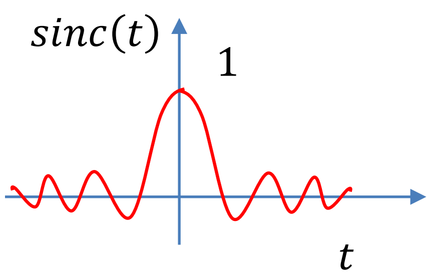
v) O sinal triangular

$$tri(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$




vi) O sinal sinc

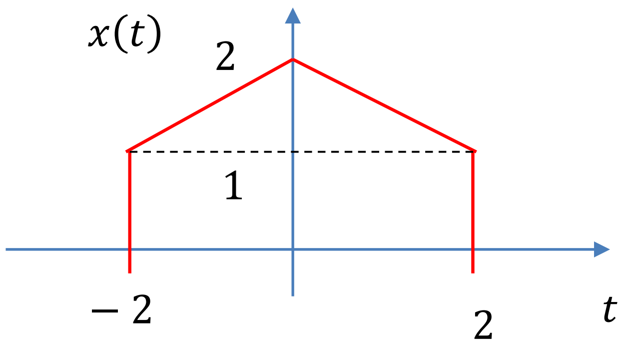
$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{sen(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$



# Exemplo 6

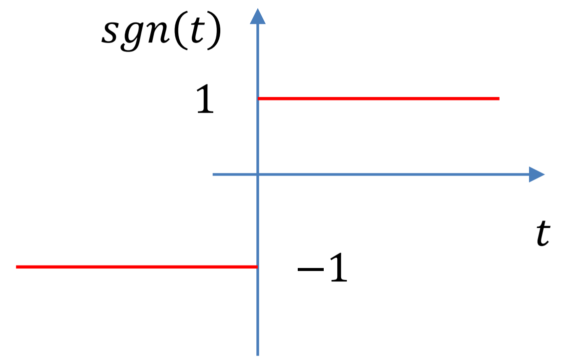
Escreva e esboce um sinal que seja a combinação de $rect\left(\frac{t}{4}\right)$ e $tri\left(\frac{t}{2}\right)$

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{4}\right) + tri\left(\frac{t}{2}\right)$$



vii) O sinal ou função sgn

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$



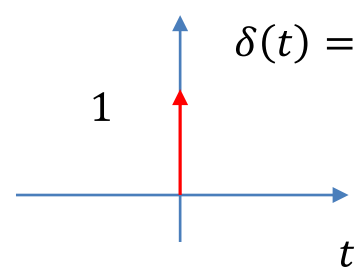

vii) O sinal impulso

Matematicamente, o impulso $\delta(t)$ não é uma função nem um sinal mas uma distribuição dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t)dt = \phi(0)$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



# Exemplo 7

Calcule

a) $y(t) = x(t) * \delta(t - t_0)$

$$y(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

b) $z(t) = \cos(t)\,.\,\delta(t - t_0)$ para $t_0$ genérico e para $t_0 = 0$

$$z(t) = \cos(t)\,.\,\delta(t - t_0) = \cos(t_0).\,\delta(t - t_0)$$

Para $t_0 = 0$ tem-se

$$z(t) = \cos(0).\,\delta(t) = \delta(t)$$

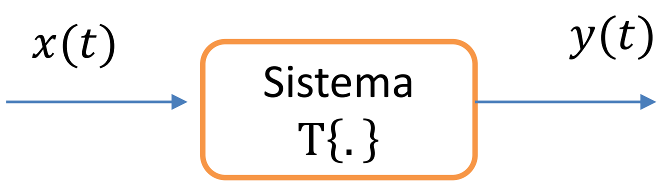
# Classificação de sistemas

- Em comunicações, um sistema é uma entidade que realiza operações matemáticas em sinais, resultando em sinais modificados na saída.

- Matematicamente, escreve-se uma operação de sistema como

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\},$$

em que $x(t)$ é o sinal de entrada, $y(t)$ é o sinal de saída e $\mathrm{T}\{.\}$ é a operação matemática realizada pelo sistema illustrada por



i) Sistemas discretos e contínuos no tempo

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\}$$

e

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\}$$

ii) Sistemas lineares e não lineares

Um sistema $\mathrm{T}\{.\}$ é linear se e somente se, para quaisquer sinais de entrada $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e constantes $\alpha$ e $\beta$, tem-se

$$\mathrm{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha \mathrm{T}\{x_1(t)\} + \beta \mathrm{T}\{x_2(t)\},$$

que envolve as propriedades aditiva e de superposição.

# Exemplo 8

Verifique se os seguintes sistemas são lineares:

a) $y(t) = ax^2(t)$

b) $y(t) = x(t - t_0)$

Solução:

a) Usando $y(t) = ax^2(t)$ e $\mathrm{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha \mathrm{T}\{x_1(t)\} + \beta \mathrm{T}\{x_2(t)\}$ tem-se

$$a(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2 \neq a\alpha\left(x_1(t)\right)^2 + a\beta\left(x_2(t)\right)^2$$

Logo, o sistema é não-linear

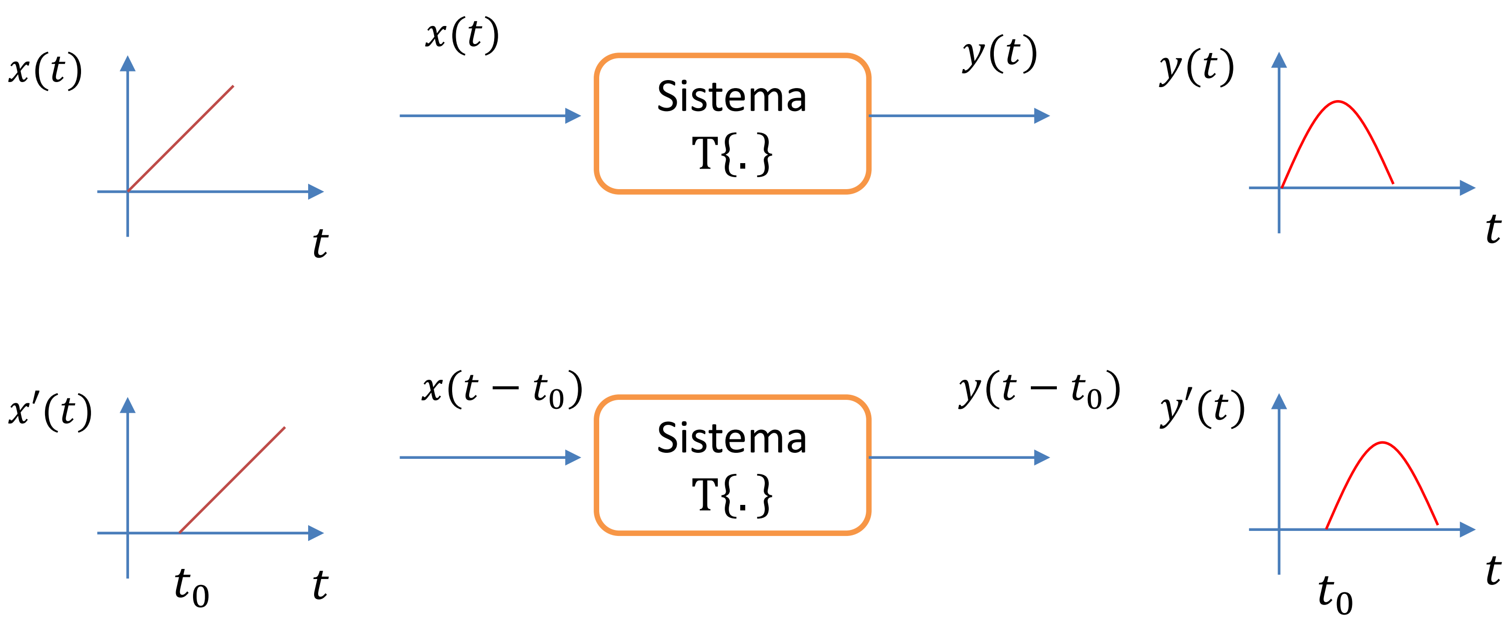
b) Usando $y(t) = x(t - t_0)$ e $\mathrm{T}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha \mathrm{T}\{x_1(t)\} + \beta \mathrm{T}\{x_2(t)\}$ tem-se

$$\alpha x_1(t - t_0) + \beta x_2(t - t_0) = \alpha x_1(t - t_0) + \beta x_2(t - t_0)$$

Logo, o sistema é linear

iii) Sistemas invariantes e variantes no tempo

Um sistema é invariante no tempo se a relação de entrada e saída não varia com o tempo.



Sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI) são importantes pois estes são completamente especificados pelas suas respostas ao impulso.

Logo, a resposta de sistemas LTI a sinais pode ser calculada pela convolução do sinal de entrada e da resposta ao impulso do sistema:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

iv) Sistemas causais e não causais

Um sistema é causal se a sua saída a qualquer instante de tempo $t_0$ depende do sinal de entrada antes de $t_0$:

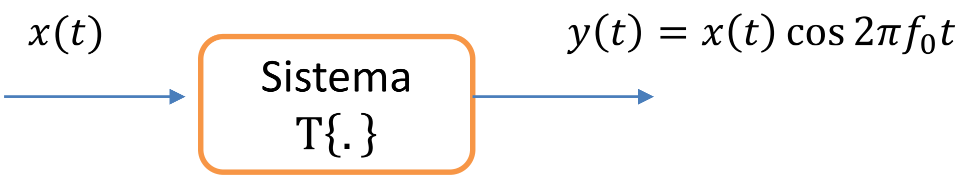
$$y(t_0) = \mathrm{T}\{x(t)\}, \qquad t \leq t_0$$

Uma condição necessária e suficiente para um sistema LTI ser causal é que a sua resposta ao impulso $h(t)$ seja causal:

$$h(t) = 0, \qquad \text{for } t < 0$$

# Exemplo 9

Verifique se o sistema $y(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t$ é variante no tempo.




Como $x(t - t_0)$ produz $y(t) = x(t - t_0)\cos 2\pi f_0 t$, o que é diferente de

$$y(t - t_0) = x(t - t_0)\cos 2\pi f_0 (t - t_0),$$

Logo, o sistema é variante no tempo.

# Análise de sistemas LTI

- Muito sistemas de comunicação podem ser modelados como sistemas LTI, que são completamente especificados por suas respostas ao impulso.

- Como os canais de comunicação são modelados como sistemas LTI então o conhecimento destes pode descrever completamente os sistemas.

- A resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema é a resposta do sistema ao impulso unitário dada por

$$h(t) = \mathrm{T}\{\delta(t)\},$$

em que a resposta do sistema no instante de tempo $\tau$, $\delta(t-\tau)$, para sistemas LTI é descrita por

$$h(t,\tau) = h(t-\tau).$$

- A saída $y(t)$ de um sistema LTI a uma entrada $x(t)$ pode ser expressa em termos de $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{T}\{x(t)\} = \mathrm{T}\{x(t) * \delta(t)\} \\
&= \mathrm{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\, x(\tau) d\tau\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{T}\{\delta(t-\tau)\} x(t) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(t) d\tau = h(t) * x(t),
\end{aligned}
$$

que é expressa como a convolução de $h(t)$ e $x(t)$.

# Exemplo 10

Considere um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t)$ e um sinal de entrada dado por

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}.$$

Calcule a resposta do sistema.

Solução:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)}d\tau$$

$$= Ae^{j2\pi f_0 t}\, e^{j\theta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)}$$

$$= Ae^{j2\pi f_0 t}\, e^{j\theta}\, H(f_0)$$

$$= Ae^{j2\pi f_0 t}\, e^{j\theta}\, |H(f_0)|e^{j\arg\{H(f_0)\}},$$

o que mostra que a resposta de um sistema LTI a uma exponencial complexa com frequência $f_0$ é uma exponencial complexa com a mesma frequência.

Isso mostra que exponenciais complexas são autofunções de sistemas LTI.

# B. Análise de Fourier

- Muitos blocos de construção em sistemas de comunicação podem ser modelados por sistemas LTI.

- Nesse caso, é comum o uso da integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Uma abordagem alternativa consiste no uso de autofunções de sistemas LTI, que resulta no uso de análise de Fourier.

- Em princípio, emprega-se a série de Fourier para sinais periódicos e a transformada de Fourier para sinais não periódicos.

# Série de Fourier

- Considere um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0$ e suponha que as seguintes condições de Dirichlet são satisfeitas:

i) $x(t)$ é absolutamente integrável no seu período

$$\int_0^{T_0} |x(t)|dt < \infty$$

ii) O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em cada período é finito.

iii) O número de descontinuidades de $x(t)$ em cada período é finito.

- Então, $x(t)$ pode ser expandido em termos de exponenciais complexas $\left\{e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ da seguinte forma:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t},$$

em que

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{\frac{-j2\pi n}{T_0}t}dt \text{ são os coeficientes de Fourier.}$$

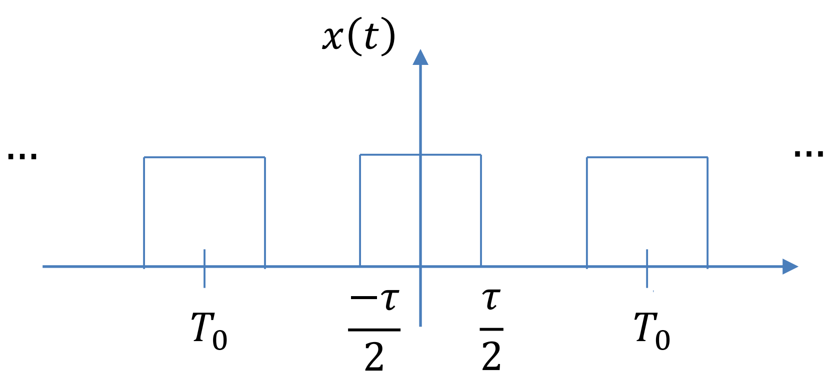
- Para um $\alpha$ arbitrário, que pode ser escolhido como $\alpha = 0$ ou $\alpha = T_0$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$ é a frequência fundamental de $x(t)$ e $T_0$ é o período fundamental.

# Exemplo 11

Determine a expansão em série de Fourier para

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right),$$

em que $\tau$ é uma constante que corresponde a largura do pulso



Solução:

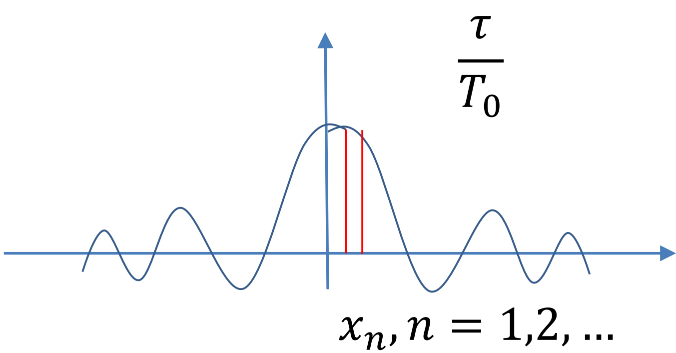
$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{-jn2\pi}\left[e^{-\frac{jn\pi\tau}{T_0}} - e^{\frac{jn\pi\tau}{T_0}}\right], n \neq 0$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right), n \neq 0$$

Logo, tem-se

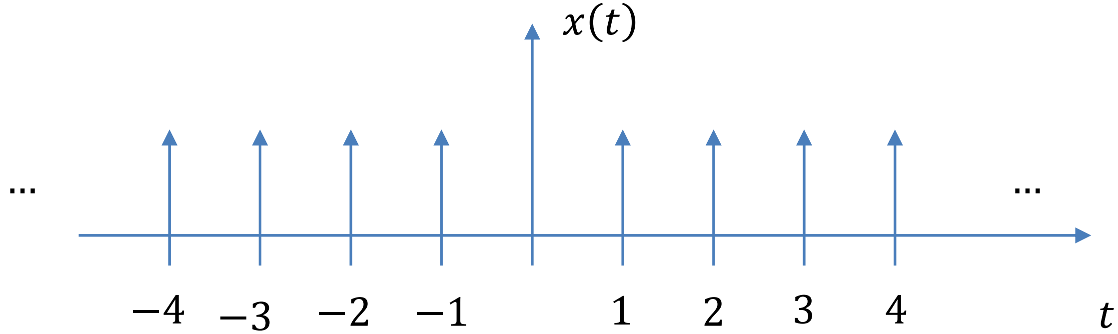
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)e^{\frac{jn2\pi t}{T_0}}$$



# Exemplo 12

Determine a representação em série de Fourier de um trem de impulsos descrito por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



Solução:

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}$$

Com esses coeficientes, tem-se

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{jn2\pi t}{T_0}}$$

# Resposta de sistemas LTI a sinais periódicos

- A resposta de um sistema LTI a um sinal exponencial complexo é um sinal exponencial complexo com a mesma frequência e uma mudança na amplitude e na fase.

- A resposta em frequência da resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema LTI é dada por

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Supõe-se que o sinal de entrada $x(t)$ a um sistema LTI é periódico com período $T_0$ e representação descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, e^{\frac{j2\pi n}{T_0} t}$$

- Logo, a resposta do sistema é dada por

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \mathrm{T}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, \mathrm{T}\left\{e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\, e^{\frac{j2\pi n}{T_0}t},$$

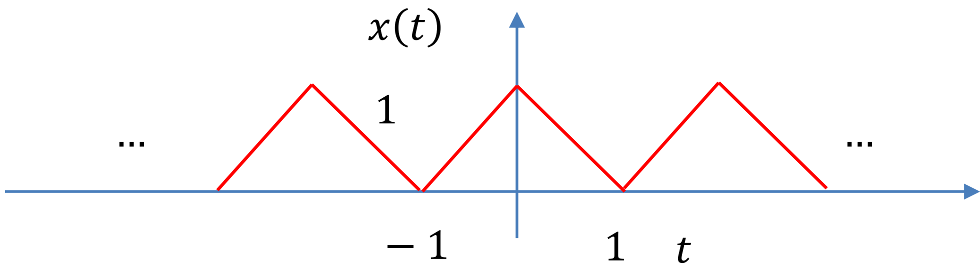
em que $y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$, $|y_n| = |x_n| \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|$ e $\arg\{y_n\} = \arg\{x_n\} + \arg\left\{H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right\}$

- Nota-se que apenas os componentes de frequências da entrada são encontrados na saída já que o sistema LTI não introduz novas frequências.

# Exemplo 13

Considere um trem de pulsos triangulares dados por

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \le t \le 0 \\ -t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$




em que $T_0 = 2$

a) Determine os coeficientes da série de Fourier de $x(t)$

b) Supondo-se que o sinal é aplicado a um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ calcule o sinal na saída.

a) $$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \mathrm{tri}(t)e^{-\frac{jn2\pi t}{T_0}}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{tri}(t)e^{-jn\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(t+1)e^{-jn\pi t}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-t)e^{-jn\pi t}dt$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)$$

b)

$$y_n = x_n H\left(\frac{n}{T_0}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)H\left(\frac{n}{2}\right)$$

# Relação de Parseval

- A relação de Parseval estabelece que a potência de um sinal periódico é a soma da potência dos componentes da série de Fourier do sinal.

- Considere a representação em série de Fourier de um sinal periódico $x(t)$ descrita por

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi nt}{T_0}}$$

- Calculando-se $|x(t)|^2$, obtém-se

$$|x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n^* x_m e^{\frac{j2\pi(n-m)t}{T_0}}$$

- Integrando-se ambos os lados, obtém-se

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n^* \, x_m \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} e^{\frac{j2\pi(n-m)t}{T_0}} dt$$

$$= T_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

em que

$$T_0 \delta_{mn} = \begin{cases} T_0, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

- De fato, a relação de Parseval mostra que a potência do sinal periódico é igual à potência da soma das potências dos harmônicos.

# C. Transformada de Fourier

- Nesta seção, considera-se a representação em série de Fourier para sinais não periódicos usando-se exponenciais complexas.

- O espectro resultante desta representação é contínuo e consiste na transformada de Fourier.

- Supõe-se que o sinal $x(t)$ satisfaz às condições de Dirichlet:

i) $x(t)$ é absolutamente integrável no seu período

$$\int_0^{T_0} |x(t)|dt < \infty$$

ii) O número de máximos e mínimos de $x(t)$ em cada período é finito.

iii) O número de descontinuidades de $x(t)$ em cada período é finito.

- A transformada de Fourier de $x(t)$ é então definida por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- A transforma inversa de Fourier é descrita por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df,$$

em que $X(f)$ é uma função complexa, sua magnitude $|X(f)|$ e fase $\arg\{X(f)\}$ representam a amplitude e fase dos componentes de frequência de $x(t)$.

- A transforma de Fourier $X(f)$ do sinal $x(t)$ emprega a notação

$$X(f) = \Im\{x(t)\}$$

- A transformada inversa de Fourier usa a notação

$$x(t) = \Im^{-1}\{X(f)\}$$

- Quando a variável da transformada de Fourier é $\omega = 2\pi f$ então tem-se

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

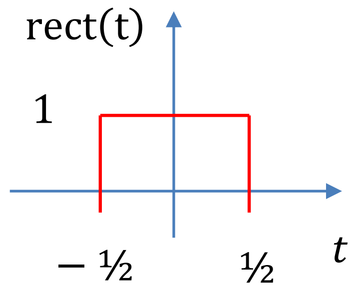
e

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

# Exemplo 14

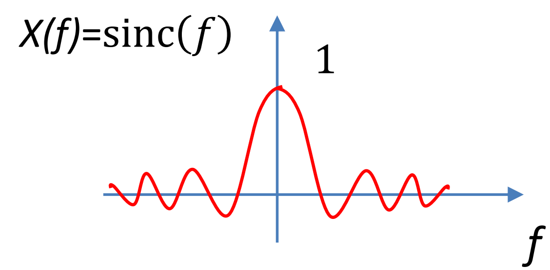
Calcule a transformada de Fourier de

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Solução:

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$




$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= -\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f}\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}\right) = \frac{\mathrm{sen}(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$

# Exemplo 15

Calcule a transformada de Fourier de $x(t) = \delta(t)$ e a transformada inversa de Fourier de $X(f) = \delta(f)$.

Solução:

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = \delta(t)\rfloor_{t=0} = 1$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)e^{j2\pi ft}df = 1$$

Logo, tem-se

$$1 \overset{\Im}{\leftrightarrow} \delta(f) \;\; \text{e} \;\; \delta(t) \overset{\Im}{\leftrightarrow} 1$$

# Propriedades

i) Linearidade

$$\Im\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

ii) Dualidade

Se $X(f) = \Im\{x(t)\}$

então $x(f) = \Im\{X(-t)\}$ e $x(-f) = \Im\{X(t)\}$

# Exemplo 15

Calcule a transformada de Fourier de $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ usando a propriedade da linearidade.

Solução:

Pode-se escrever $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

A transformada de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} X(f) &= \Im\{x(t)\} = \Im\{u(t)\} \\ &= \Im\left\{\tfrac{1}{2}\right\} + \Im\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\} = \tfrac{1}{2}\delta(f) + \tfrac{1}{j2\pi f} \end{aligned}$$

iii) Deslocamento no tempo

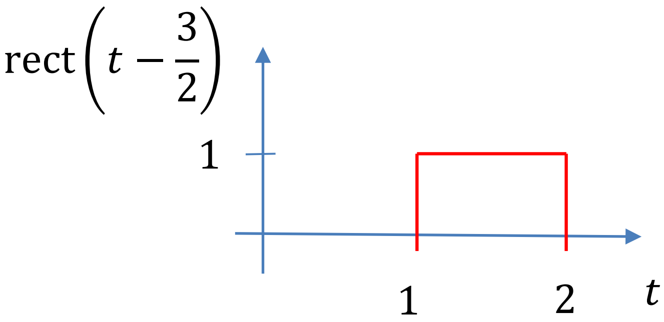
$$\Im\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$$

Fazendo-se $u = t - t_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\Im\{x(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi ft_0}e^{-j2\pi fu}du \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j2\pi fu}du \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\Im\{x(t)\} \\
&= e^{-j2\pi ft_0}\, X(f)
\end{aligned}$$

# Exemplo 16

Determine a transformada de Fourier de $x(t) = \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)$, em que $t_0 = \frac{3}{2}$



Solução:

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = e^{-j2\pi f\frac{3}{2}}\,\Im\{\text{rect}(t)\}$$

$$= e^{-j2\pi f\frac{3}{2}}\,\text{sinc}(f)$$

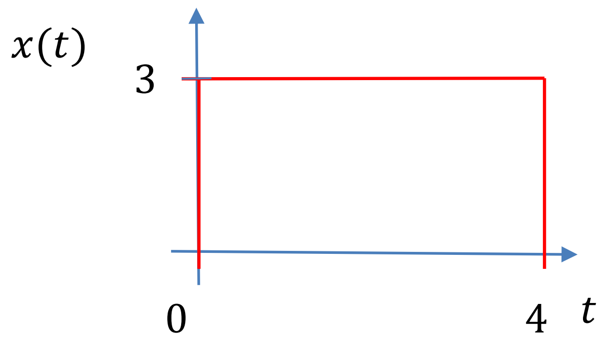
iv) Escalonamento

Para qualquer número real $a \neq 0$, tem-se

$$\Im\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

# Exemplo 17

Determine a transformada de Fourier de $x(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$



Solução:

O sinal pode ser escrito como $x(t) = 3\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)$

A transforma de Fourier de $x(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
X(f) &= \mathfrak{I}\{x(t)\} = \mathfrak{I}\left\{3\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)\right\} \\
&= 3\mathfrak{I}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{4}\right)\right\} = 3e^{-j2\pi f\,2}\,\mathfrak{I}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)\right\} \\
&= 3e^{-j4\pi f}\,\frac{1}{\left|\frac{1}{4}\right|}\,\mathrm{sinc}(4f) \\
&= 12e^{-j4\pi f}\,\mathrm{sinc}(4f)
\end{aligned}$$

v) Convolução:

$$\Im\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau) d\tau\right] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f (t-\tau)}\, dt\right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Fazendo-se $u = t - \tau$ tem-se

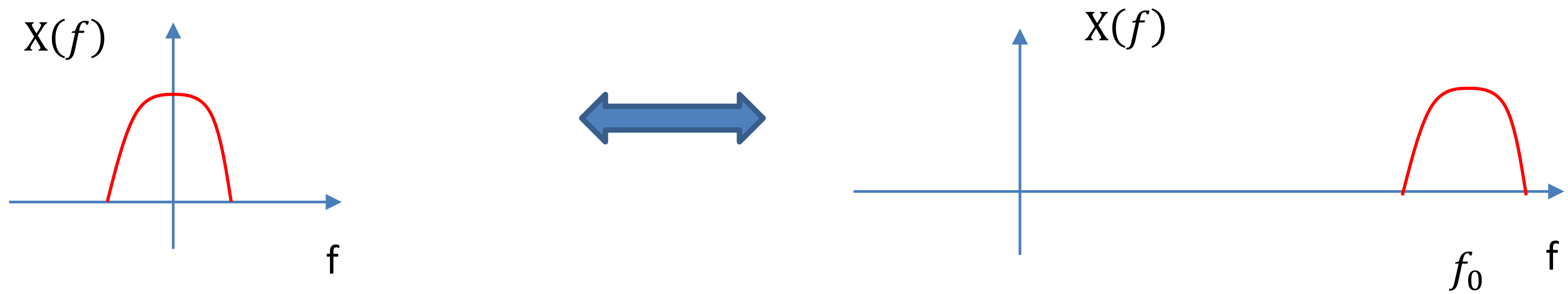
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j2\pi f u}\, du\right]}_{Y(f)} e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$= X(f) Y(f) = \Im\{x(t)\} \Im\{y(t)\}$$

vi) Modulação

$$\mathfrak{F}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f t}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t}dt$$
$$= X(f - f_0)$$



# Exemplo 18

Determine a transformada de Fourier dos seguintes sinais:

a) $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

b) $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

*c)* $z(t) = \mathrm{x(t)}\cos(2\pi f_0 t)$

Solução:

a)

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \Im\left\{e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \delta(f - f_0)$$

b)

$$\begin{aligned} Y(f) = \Im\{y(t)\} &= \Im\{\cos(2\pi f_0 t)\} \\ &= \Im\left\{\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0) \end{aligned}$$

c)

$$Z(f) = \Im\{z(t)\} = \Im\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\}$$

$$= \Im\left\{x(t)\left(\frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$

vii) Relação de Parseval

Se as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ são denotadas por $X(f)$ e $Y(f)$, respectivamente, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,Y^*(f)df$$

Se fizermos $x(t) = y(t)$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df\,,$$

que é conhecido por Teorema de Rayleigh.

viii) Autocorrelação

A função autocorrelação de um sinal $x(t)$ é dada por

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = x(\tau)\,x^*(-\tau)$$

O teorema da autocorrelação estabelece que

$$\Im\{R_x(\tau)\} = |X(f)|^2$$

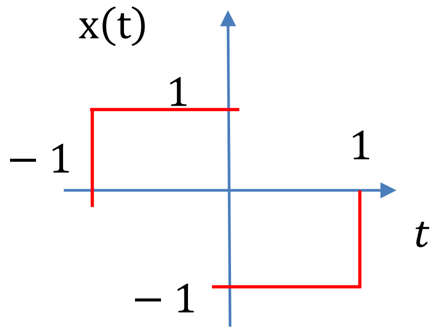
ix) Diferenciação:

A transformada de Fourier da derivada do sinal pode ser obtida por

$$\Im\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2\pi f X(f)$$

# Exemplo 19

Calcule a transformada de Fourier do sinal $x(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{tri}(t)$



Solução:

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \Im\left\{\frac{d}{dt}\mathrm{tri}(t)\right\}$$
$$= j2\pi f\ \Im\{\mathrm{tri}(t)\}$$
$$= j2\pi f\ sinc^2(f)$$

x) Diferenciação no domínio da frequência

$$\Im\{t^n x(t)\} = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

xi) Integração

$$\Im\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\mathrm{X}(0)\delta(f)$$

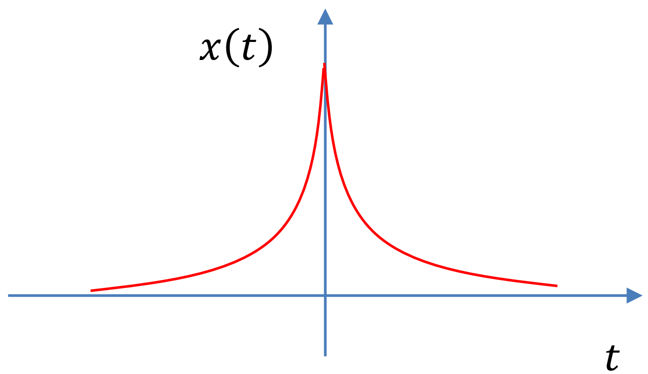
xii) Momentos

Se $X(f) = \Im\{x(t)\}$ então o n-ésimo momento de $x(t)$ é dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t)dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} X(f)\bigg|_{f=0}$$

# Exemplo 20

Calcule a transformada de Fourier do sinal $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \;\; \alpha > 0$



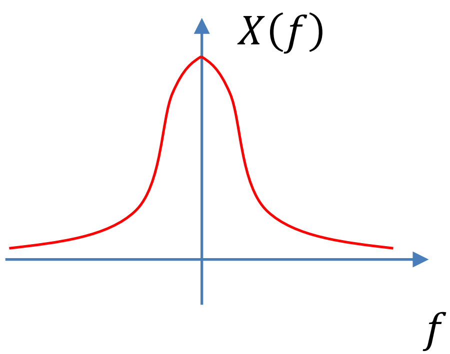
Solução:

Pode-se escrever $x(t)$ como

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{\alpha t}u(-t)$$

Então calcula-se a transformada de Fourier

$$\begin{aligned} X(f) &= \Im\{x(t)\} = \Im\{e^{-\alpha t}u(t)\} + \Im\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}u(t)e^{-j2\pi f t}dt + \Im\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \int_0^\infty e^{-(\alpha+j2\pi f)t}dt + \Im\{e^{\alpha t}u(-t)\} \\ &= \frac{1}{\alpha+j2\pi f} + \frac{1}{\alpha-j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$



# Transformada de Fourier de sinais periódicos

- A transformada de Fourier de sinais periódicos consiste em funções impulso no domínio da frequência.

- Considere um sinal periódico $x(t)$ com período $T_0$ e sejam $x_n$ os coeficientes da expansão em série de Fourier do sinal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{\frac{j2\pi nt}{T_0}}$$

- Calculando-se a transforma de Fourier de $x(t)$, obtém-se

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

o que mostra que a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma sequência de impulsos na frequência espaçados por $T_0$.

- Se definirmos o sinal truncado $x_{T_0}(t)$ como

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pode-se escrever

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{T_0}(t - nT_0)$$

- Como $x_{T_0}(t - nT_0) = x_{T_0}(t) * \delta(t - nT_0)$, tem-se

$$x(t) = x_{T_0}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

- Logo, usando-se o teorema da convolução, obtém-se

$$X(f) = X_{T_0}(f)\left[\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})\right]$$

$$= \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)\delta(f-\frac{n}{T_0})$$

- Comparando-se o resultado anterior com

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\,\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right),$$

conclui-se que

$$x_n = \frac{1}{T_0}X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right).$$

# Resumo do procedimento

Dado um sinal periódico $x(t)$, pode-se encontrar $x_n$ da seguinte forma:

i) Determina-se o sinal truncado $x_{T_0}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

ii) Calcula-se a transformada de Fourier do sinal truncado $x_{T_0}(t)$

iii) Avalia-se a transformada de Fourier do sinal truncado $x_{T_0}(t)$ em $f = \frac{n}{T_0}$ e escalada por $\frac{1}{T_0}$:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

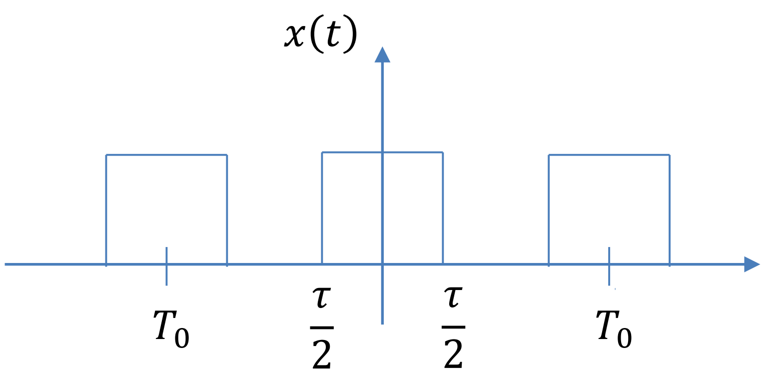
em que $x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$.

# Exemplo 21

Determine os coeficientes da série e a transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{\tau}\right),$$

em que $\tau$ é uma constante que corresponde a largura do pulso.



Solução:

O sinal truncado é dado por

$$x_{T_0}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

A transformada de Fourier de $x_{T_0}(t)$ é descrita por

$$X(f) = \Im\{x_{T_0}(t)\} = \tau \mathrm{sinc}\,(\tau f)$$

Logo, tem-se

$$x_n = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0} \mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_0} \mathrm{sinc}\left(\frac{n\tau}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

# Transmissão em canais de comunicação

- Os canais de comunicação podem ser modelados como sistemas LTI.

- Logo, a transmissão de sinais em canais de comunicação pode ser modelada como a transmissão de sinais em sistemas LTI.

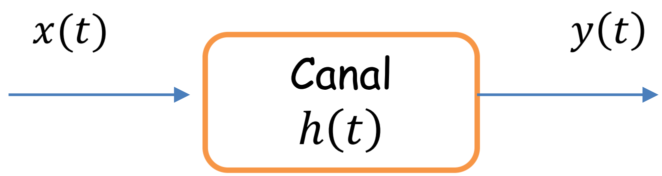
- O teorema da convolução serve como ferramenta para analisar problemas de transmissão do tipo

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

em que $X(f)$, $H(f)$ e $Y(f)$ são as transformadas de Fourier dos sinais de entrada, do canal e da resposta do sistema.

# Exemplo 22

Calcule a resposta $y(t)$ do seguinte sistema de transmissão.



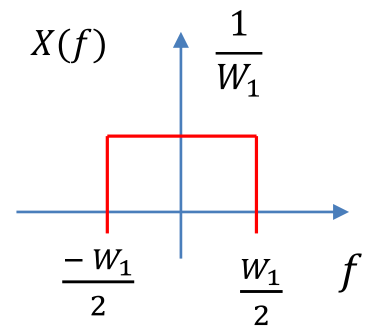

em que $x(t) = sinc\ (W_1 t)$ e $h(t) = sinc\ (W_2 t)$

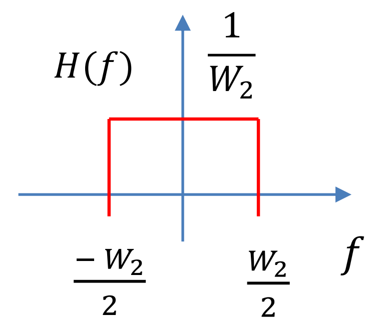
Usando a transformada de Fourier, tem-se

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \Im\{sinc\ (W_1 t)\} = \frac{1}{W_1} rect\left(\frac{f}{W_1}\right)$$

e

$$H(f) = \Im\{h(t)\} = \Im\{sinc\ (W_2 t)\} = \frac{1}{W_2} rect\left(\frac{f}{W_2}\right)$$




A saída é dada por

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{W_2}\frac{1}{W_1} rect\left(\frac{f}{W_2}\right) rect\left(\frac{f}{W_1}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{W_2}\frac{1}{W_1} rect\left(\frac{f}{W_1}\right), & W_1 \leq W_2 \\ \frac{1}{W_2}\frac{1}{W_1} rect\left(\frac{f}{W_2}\right), & W_2 < W_1 \end{cases}$$

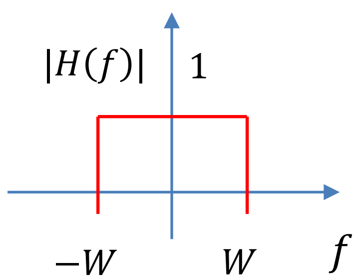
No domínio do tempo, tem-se um sinal passa-baixa dado por

$$y(t) = \Im^{-1}\{Y(f)\} = \begin{cases} \dfrac{1}{W_2} sinc\,(W_1 t), & W_1 \leq W_2 \\ \dfrac{1}{W_1} sinc\,(W_2 t), & W_2 < W_1 \end{cases}$$

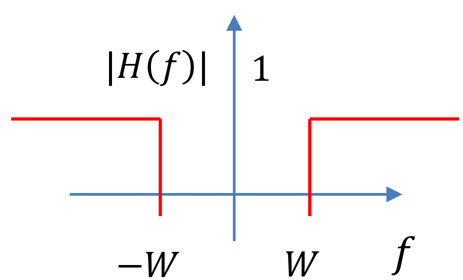
- Sinais com uma representação no domínio da frequência que contém frequências próximas da origem são sinais passa-baixa.

- Um sistema LTI que deixa passar todas as frequências abaixo de $W$ e rejeita as frequências acima de $W$ é um sistema passa-baixa ideal.

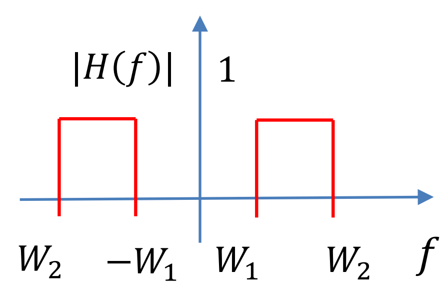
- Exemplos de sistemas passa-baixa, passa-alta e passa-faixa ideais são mostrados abaixo.




passa-baixa



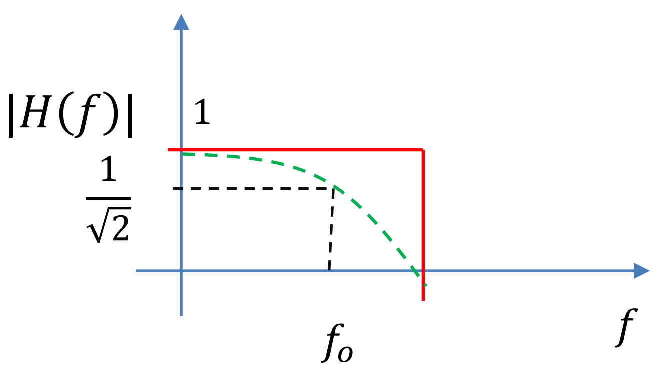

passa-alta




passa-faixa

- Em filtros passa-baixa, passa-alta e passa-faixa não ideais, a largura de faixa é usualmente definida em termos da redução de 50% de $|H(f)|^2$.

- Essa largura de faixa é conhecida como faixa de 3dB do filtro e é ilustrada por




- A frequência $f_o$ determina a largura de faixa de 3dB do filtro.

# Exemplo 23

A magnitude da função de transferência de um filtro é descrita por

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{10000}\right)^2}}$$

Determine o tipo de filtro e a sua largura de faixa de 3dB.

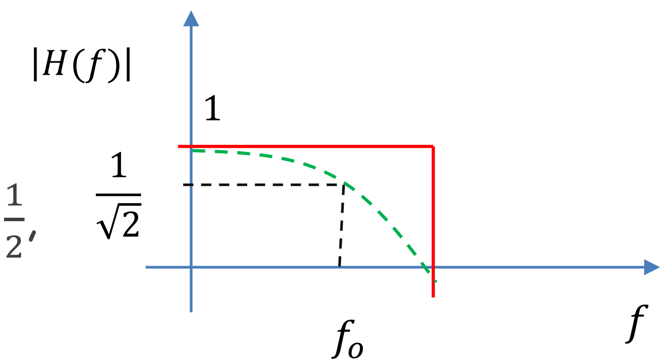
Solução:

Em $f = 0$, tem-se $|H(f)| = 1$ e $|H(f)|$ diminui à medida que $f \to \infty$.

Logo, trata-se de um filtro passa-baixa.

Para obter a largura de faixa de 3dB faz-se

$$|H(f_o)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f_o}{10000}\right)^2} = \frac{1}{2}|H(0)|^2 = \frac{1}{2},$$




o que resulta em

$$f_o = 10000\text{Hz ou } 10 \text{ kHz}.$$

Logo, o filtro é passa-baixa e possui uma largura de faixa de 3dB de 10KHz.

# D. Energia e potência

- A energia de um sinal $x(t)$ é definida por

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

- A potência de um sinal $x(t)$ é descrita por

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- A seguir, serão consideradas as funções densidade espectral de potência e autocorrelação dos sinais do tipo energia e potência.

- Para um sinal do tipo energia $x(t)$, define-se a função autocorrelação

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) &= x(\tau) * x^*(-\tau) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt
\end{aligned}
$$

- Fazendo-se $\tau = 0$, obtém-se a densidade espectral de energia

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

- Um sinal $x(t)$ aplicado a um canal de comunicação modelado como um sistema LTI com resposta ao impulso $h(t)$ resulta na saída

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

ou no domínio da frequência

$$Y(f) = H(f)X(f),$$

- A energia de $y(t)$ é descrita por

$$\varepsilon_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 |X(f)|^2 df = R_y(0),$$

em que $R_y(\tau) = y(\tau) * y^*(-\tau)$ é a função autocorrelação de $y(t)$ .

- A transformada inversa de Fourier de $|Y(f)|^2$ é dada por

$$
\begin{aligned}
R_y(\tau) = \Im^{-1}\{|Y(f)|^2\} &= \Im^{-1}\{|H(f)|^2|X(f)|^2\} \\
&= \Im^{-1}\{|H(f)|^2\}\Im^{-1}\{|X(f)|^2\} \\
&= R_h(\tau) * R_x(\tau)
\end{aligned}
$$

- Supondo-se que $H(f) = \begin{cases} 1, & W < f < W + \nabla W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ tem-se

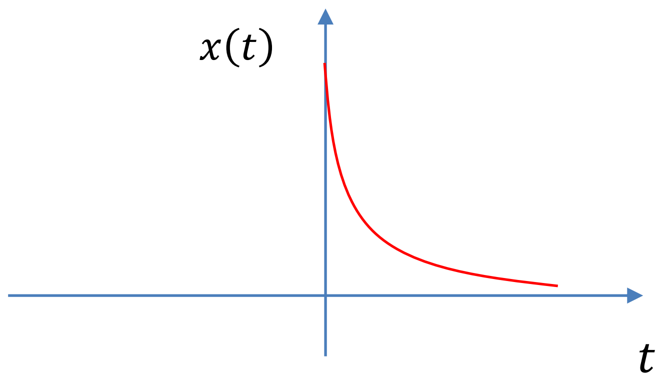
$$
|Y(f)|^2 = \begin{cases} |X(f)|^2, & W < f < W + \nabla W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
$$

e

$$
\varepsilon_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df
$$

# Exemplo 24

Determine a função autocorrelação, a densidade espectral de energia e a energia do sinal $x(t) = e^{-at}u(t), \;\; \alpha > 0.$



Solução:

A transformada de Fourier do sinal transmitido é dada por

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

O módulo ao quadrado do sinal indica a densidade espectral de energia, que é dada por

$$\varepsilon_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

A função autocorrelação do sinal é calculada por

$$R_x(\tau) = \Im^{-1}\{|X(f)|^2\} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

A energia do sinal é calculada por

$$R_x(0) = \frac{1}{2\alpha}$$

- Para sinais periódicos, a função autocorrelação de média temporal de $x(t)$ é definida por

$$R_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- A densidade espectral de potência de $x(t)$ é descrita por

$$S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\},$$

em que $R_x(\tau) = \Im^{-1}\{S_x(f)\}$ e $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df.$

- Um sinal do tipo potência $x(t)$ aplicado a um canal de comunicação modelado por um sistema LTI com resposta $h(t)$ gera a resposta

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

- A função autocorrelação de média temporal para o sinal $y(t)$ é dada por

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)y^*(t-\tau)dt$$

- Substituindo-se $y(t)$ obtém-se

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t-u)du\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)x^*(t-\tau-v)dv\right]dt$$

- Introduzindo uma mudança de variável $w = t - u$, obtém-se

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v) \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[x(t-u)x^*(u+w-\tau-v)dw]dudv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)h^*(v)R_x(\tau+v-u)dudv = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau)$$

- Calculando-se a transformada de Fourier da expressão acima, tem-se a densidade espectral de potência

$$S_y(f) = \Im\{R_y(\tau)\} = H(f)H^*(f)S_x(f)$$
$$= |H(f)|^2 S_x(f)$$

- Suponha que o sinal $x(t)$ seja periódico com período $T_0$ e tem-se os coeficientes de Fourier $\{x_n\}$ da sua expansão.

- A função autocorrelação de média temporal é dada por

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

- Usando a expansão em série de Fourier, obtém-se

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_n\, x_n^*\, e^{\frac{j2\pi n}{T_0}\tau}\, e^{\frac{j2\pi(n-m)}{T_0}t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\, e^{\frac{j2\pi n}{T_0}\tau}$$

- A densidade espectral de potência de um sinal periódico é dada por

$$S_x(f) = \Im\{R_x(\tau)\}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 \, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right),$$

em que a potência do sinal periódico $x(t)$ é

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

- Se o sinal periódico for aplicado a um canal de comunicação modelado como um sistema LTI com resposta em frequência $H(f)$ obtém-se

$$\begin{aligned} S_y(f) = \Im\{R_y(\tau)\} &= H(f)H^*(f)S_x(f) \\ &= |H(f)|^2\, S_x(f) \\ &= |H(f)|^2 \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\, \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\, \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \end{aligned}$$

- A potência do sinal $y(t)$ é dada por

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2\, \left|H\left(\frac{n}{T_0}\right)\right|^2$$

# E. Transformada de Hilbert

- A transformada de Hilbert de um sinal $x(t)$ desloca os componentes em frequência deste sinal em 90º , gerando o sinal $\hat{x}(t)$.

- A transformada de Hilbert é muito útil em comunicações e processamento de sinais, e foi inventada por David Hilbert.

- David Hilbert foi um dos mais influentes matemáticos alemães nos séculos 19 e 20.

- Hilbert foi professor na Universidade de Goettingen e desenvolveu muitas ideias nas áreas de álgebra, geometria, operadores espectrais e física matemática.

- Por exemplo, a transformada de Hilbert do sinal

$$x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \theta)$$

é dada por

$$\hat{x}(t) = Acos(2\pi f_0 t + \theta - 90^o\ ) = Asen(2\pi f_0 t + \theta)$$

- A transformada de Fourier do sinal $\hat{x}(t)$ equivale à multiplicação de $X(f)$ por $-jsgn(f)$ :

$$\hat{X}(f) = \Im\{\hat{x}(t)\} = -jsgn(f)X(f)$$

e

$$\hat{x}(t) = \Im^{-1}\{\hat{X}(f)\} = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{1}{t-\tau}d\tau$$

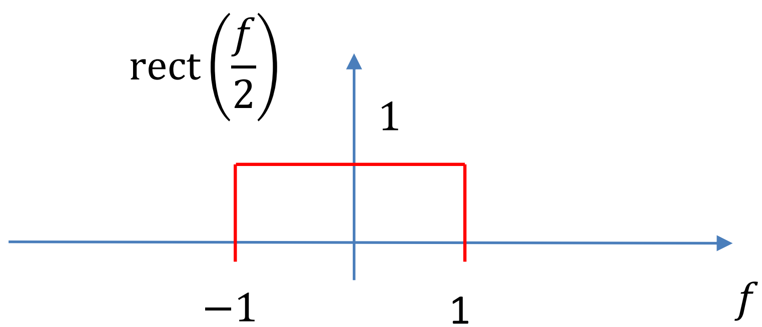
# Exemplo 25

Determine a transformada de Hilbert de $x(t) = 2sinc(2t)$

Solução:

A transformada de Fourier de $x(t) = 2sinc(2t)$ é descrita por

$$
\begin{aligned}
X(f) &= \Im\{x(t)\} = 2\Im\{sinc(2t)\} \\
&= 2\frac{1}{2}rect\left(\frac{f}{2}\right) = rect\left(\frac{f}{2}\right) \\
&= rect\left(f+\frac{1}{2}\right) + rect\left(f-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$



Para obter a representação no domínio da frequência da transformada de Hilbert de $x(t)$, emprega-se

$$\begin{aligned}\hat{X}(f) = \Im\{\hat{x}(t)\} &= -jsgn(f)X(f) \\ &= -jsgn(f)\left(rect\left(f+\frac{1}{2}\right)+rect\left(f-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -jsgn(f)rect\left(f+\frac{1}{2}\right)-jsgn(f)rect\left(f-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Calculando-se a transformada inversa de Fourier de $\hat{X}(f)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \Im^{-1}\{\hat{X}(f)\} \\ &= je^{-j\pi t}sinc(t) - je^{j\pi t}sinc(t) \\ &= -j\left(e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}\right)sinc(t) \\ &= -j2jsen(\pi t)sinc(t) \\ &= 2sen(\pi t)sinc(t)\end{aligned}$$

# Propriedades

i) Transformação de sinais pares e ímpares:

A transformada de Hilbert de um sinal par é ímpar, enquanto a transformada de Hilbert de um sinal ímpar é par.

ii) Reversão de sinal:

$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$

iii) Energia:

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}\,(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{X}\,(f)\right|^2 df$$

iv) Ortogonalidade:

O sinal $x(t)$ e sua transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ são ortogonais.

# F. Sinais passa-baixa e passa-faixa

- Um sinal passa-baixa é um sinal cujo espectro é localizado em torno da frequência zero.

- Um sinal passa-faixa é um sinal cujo espectro é localizado em torno de uma frequência $f_c$, que é muito mais alta do que a largura de faixa do sinal.

- Considere um sinal passa-faixa descrito por

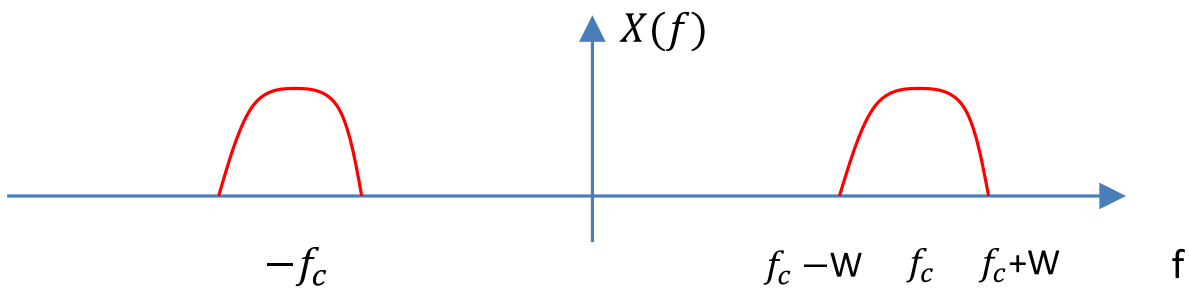
$$
\begin{aligned}
x(t) &= Acos(2\pi f_c t + \theta) \\
&= Acos(\theta)cos(2\pi f_c t) - Asen(\theta)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t) \\
&= \ x_c cos(2\pi f_c t) - \ x_s\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\,,
\end{aligned}
$$

em que $x_c = Acos(\theta)$ é chamado de componente em fase e $x_s = Asen(\theta)$ é o componente em quadratura.

- Pode-se então reescrever o sinal passa-faixa $x(t)$ como

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Acos(2\pi f_c t + \theta) \\
&= Re\left[A(t)e^{j(2\pi f_c t + \theta(t))}\right] \\
&= A(t)cos(\theta)cos(2\pi f_c t) - A(t)sen(\theta)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t) \\
&= \; x_c(t)cos(2\pi f_c t) - \; x_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t),
\end{aligned}
$$

que contém uma faixa de frequências.



- Nesse caso, os componentes em fase e em quadratura são

$$x_c(t) = A(t)cos(\theta)$$

e

$$x_s(t) = A(t)sen(\theta),$$

- O sinal passa-faixa pode ser expresso como

$$x(t) = x_c(t)cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t),$$

em que os componente em fase e em quadratura são sinais passa-baixa, o que permite a representação do sinal passa-baixa complexo como

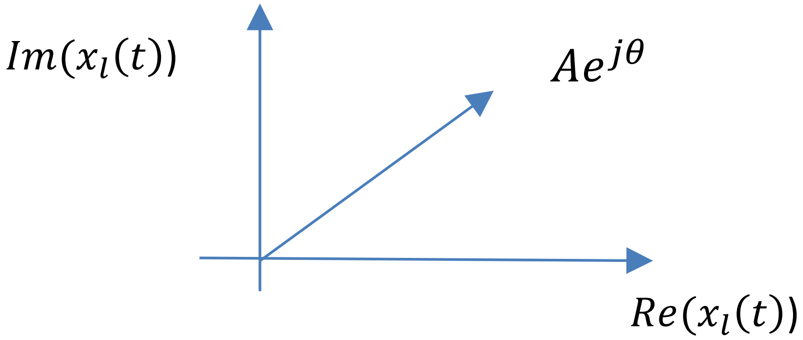
$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)} = x_c(t) + jx_s(t),$$

que é conhecido como o equivalente passa-baixa de $x(t)$.

- O sinal passa-baixa pode também ser descrito como um fasor:

$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)}$$
$$= x_c(t) + jx_s(t),$$

em que $A(t)$ e $\theta(t)$ variam lentamente.



- A representação do sinal passa-baixa $x_l(t)$ em coordenadas polares é dada por

$$x_l(t) = A(t)e^{j\theta(t)}$$

$$= \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}e^{jtan^{-1}\left\{\frac{x_S(t)}{x_C(t)}\right\}},$$

em que a envoltória e a fase do sinal passa-baixa são descritas por

$$|x_l(t)| = A(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

$$\arg x_l(t) = \theta(t) = tan^{-1}\left\{\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right\}$$

- Usando as relações entre os sinais passa-faixa $x(t)$ e passa-baixa $x_l(t)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Re\left[x_l(t)e^{j2\pi f_c t}\right] \\
&= Re\left[A(t)e^{j(2\pi f_c t+\theta(t))}\right] \\
&= A(t)\cos(2\pi f_c t + \theta)\,,
\end{aligned}
$$

que é uma forma de expressar um sinal em termos da envoltória complexa e da fase do sinal passa-faixa.

# Exemplo 26

Considere uma mensagem $m(t)$ a ser transmitida em um sinal passa-faixa descrito por

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

a) Determine a envoltória e o equivalente passa-baixa do sinal $x(t)$

b) Determine e esboce a transformada de Fourier de $x(t)$

PUC RIO

Solução:

a)

A envoltória do sinal pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
z(t) &= x(t) + j\hat{x}(t) \\
&= m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \widehat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \\
&\qquad + j[\widehat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) - m(t)\cos(2\pi f_0 t)] \\
&= \big(m(t) + j\widehat{m}(t)\big)e^{j2\pi f_0 t}
\end{aligned}
$$

O equivalente passa-baixa do sinal é dado por

$$
\begin{aligned}
x_l(t) &= x_c(t) + jx_s(t) \\
&= z(t)e^{-j2\pi f_0 t} = m(t) + j\widehat{m}(t)
\end{aligned}
$$

b) A transformada de Fourier de $m(t)$ é $M(f)$ e a transformada de Fourier de $x(t)$ é descrita por

$$X(f) = \Im\{x(t)\} = \Im\{m(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{m}(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\}$$

$$= M(f) * \frac{[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]}{2} - \left(-jsgn(f)M(f)\right) * \frac{[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]}{2j}$$

$$= \frac{1}{2}M(f+f_0)[1-sgn\,(f+f_0)] + \frac{1}{2}M(f-f_0)[1-sgn\,(f-f_0)]$$